

Mathematische Abhandlungen aus dem Verlage mathematischer Modelle
von Martin Schilling in Halle a. S.

Neue Folge Nr. 4.

Die Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt.

Von

Prof. Dr. Hermann Grassmann

in Halle a. S.

Abhandlung zu den Modellen der Serie XXIX:
Drei Modelle zur Kreiseltheorie.

Sonderabdruck aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik,
48. Band, Heft 3 u. 4.

M. S. 1160. ^b

Halle a. S.

Verlag von Martin Schilling.
1903.



Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Einleitung.

Das Problem der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt ist für den einfachsten Fall, wo keine äusseren Kräfte wirken, seit der Mitte des 18. Jahrhunderts von einer Reihe hervorragender Mathematiker behandelt und namentlich durch die Arbeiten von Euler, Lagrange, Poinso^t, Poisson und Jacobi wesentlich gefördert worden. Seit den fünfziger Jahren des vorigen Jahrhunderts schien das Problem so gut wie erledigt, bis im Jahre 1880 W. Hefs den Nachweis führte, daß die schönen aus dem Jahre 1834 stammenden Untersuchungen von Poinso^t, durch welche insbesondere die geometrische Seite des Problems in anschaulichster Weise entwickelt wurde, in einem wichtigen Punkte der Verbesserung bedürftig seien.¹⁾ Dies erscheint besonders deshalb bemerkenswert, weil der erwähnte Fehler der Poinso^tschen Darstellung²⁾ trotz ihrer grossen Verbreitung fast ein halbes Jahrhundert unbeachtet geblieben und inzwischen sogar in die Lehrbücher der Mechanik übergegangen war; und es ist daher auch begreiflich, daß durch jene Entdeckung, die wenige Jahre später auch noch von anderer Seite gemacht wurde³⁾, die Beschäftigung mit dem Problem der Drehung eines kraftfreien starren Körpers einen neuen Anstoss erhielt.

1) Vgl. W. Hefs, Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariablen Ebene. Inauguraldissertation. München, 1880.

2) Vgl. unten S. 35.

3) Vgl. die weiter unten zitierten Arbeiten von De Sparre.

Erster Abschnitt.

Der Polhodiekegel und der Herpolhodiekegel. Die beiden Polwege.

Wie in den Elementen der Kinematik gezeigt wird, läßt sich jede beliebige Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt O für jedes Zeitelement auffassen als eine Drehung um eine gewisse, durch den festen Punkt gehende Axe, die sogenannte instantane Drehaxe des Körpers. Diese Axe wechselt freilich, worauf auch ihr Name hindeuten soll, von Augenblick zu Augenblick ihre Lage, und zwar in doppelter Weise. Einmal verlegt sie beständig ihren Ort in dem starren Körper und beschreibt also, da sie dauernd durch den festen Punkt O hindurchgehen muß, eine in dem starren Körper liegende Kegelfläche, die den Punkt O zum Scheitel hat. Andererseits aber führt sie gleichzeitig auch eine Bewegung in Bezug auf ein im Raume festliegendes System aus und durchläuft somit eine zweite Kegelfläche, welche ihre Lage im Raum beibehält und ihren Scheitel ebenfalls im Punkt O hat. Beide Kegelflächen berühren einander jeden Augenblick längs einer Erzeugenden, und diese Erzeugende ist eben die instantane Drehaxe. Dreht sich der starre Körper um sie auch nur *unendlich wenig*, so kommt dadurch eine andere Erzeugende des ersten Kegels mit einer solchen des zweiten in Berührung und wird so für den nächsten Moment zur Drehaxe des Körpers. Während einer *endlichen* Bewegung des starren Körpers rollt also der erste Kegel, ohne zu gleiten, auf dem zweiten ab.

Um bei einem speziellen Rotationsprobleme auf Grund der dynamischen Differentialgleichungen die Gestalt der beiden Kegel und zugleich für jeden Augenblick die Geschwindigkeit und den Sinn des Abrollens ermitteln zu können, bedient man sich *zweier* gleichstimmiger rechtwinkliger Koordinatensysteme, eines Systems x, y, z , welches mit dem starren Körper fest verbunden ist und also an der Bewegung des Körpers Teil nimmt, und eines Systems $1, 2, 3$, das absolut fest im Raume liegt. Für beide Koordinatensysteme wählt man den festen Punkt O zum Anfangspunkt, für das bewegliche System x, y, z überdies am besten die Hauptträgheitsaxen des Körpers in Bezug auf den Punkt O zu Koordinatenachsen.

Denkt man sich, es sei gelungen, die beiden Kegel zu bestimmen, und kennt man außerdem für irgend einen Augenblick die Lage des ersten Kegels gegen den zweiten, so kann man sich bereits ein vollständiges Bild von dem räumlichen Gange der Bewegung des Körpers verschaffen.

Um indes diese Bewegung auch ihrem zeitlichen Verlaufe nach verfolgen zu können, muß man auch noch die Winkelgeschwindigkeit ermitteln, mit welcher der Körper in jedem Augenblicke um seine instantane Axe rotiert, und den Sinn, in dem diese Rotation erfolgt. Zur anschaulichen Durchführung dieser Aufgabe pflegt man die GröÙe der Winkelgeschwindigkeit durch eine Länge bildlich darzustellen, die man von O aus auf der zugehörigen Erzeugenden der beiden oben beschriebenen Kegel abträgt, und zugleich den Sinn der Drehung dadurch zu kennzeichnen, daß man diese Abtragung auf demjenigen Halbstrahl jener Erzeugenden vornimmt, um welchen herum die Drehung in positivem Sinne erfolgt. Positiv soll dabei der Sinn einer Drehung um einen von O ausgehenden Halbstrahl heißen, wenn sie für einen diesen Halbstrahl von O aus entlang blickenden Beschauer in demselben Sinne erfolgt, wie diejenige Drehung um die x -Axe, bei welcher die positive Seite der y -Axe auf dem kürzesten Wege in die positive Seite der z -Axe übergeführt wird, diese Drehung betrachtet von einem Beschauer, der vom Anfangspunkte O aus die positive Seite der x -Axe entlang sieht.

Durch die so definierte Abtragung erhält man auf jeder Erzeugenden der beiden Kegel einen Punkt, der durch seine Lage die Winkelgeschwindigkeit und den Sinn der Drehung um diese Erzeugende charakterisiert und der Drehpol dieser Erzeugenden heißt. Als geometrischer Ort aller Drehpole ferner ergibt sich auf jedem der beiden Kegel eine Kurve, welche als Polweg bezeichnet wird, und diese beiden Polwege wickeln sich ebenso wie die beiden Kegel bei der Bewegung des Körpers auf einander ab. Ihr Berührungspunkt heißt dabei für jeden Augenblick der instantane Drehpol des Körpers.

Nach dem Vorgange von Poinso't, auf den die Einführung der beiden Kegel mit ihren Polwegen zurückgeht, nennt man endlich insbesondere noch den auf dem beweglichen Kegel liegenden Polweg die Polhodie oder Polhodiekurve, den Polweg des festen Kegels die Herpolhodie oder Herpolhodiekurve; und nach diesen beiden Kurven wiederum werden die beiden Kegel als Polhodie- und Herpolhodiekegel unterschieden.

Kennt man die beiden Polwege nach ihrer GröÙe und Gestalt, sowie die Lage der Polhodie in dem starren Körper, die der Herpolhodie im festen Raum und endlich für irgend einen Zeitpunkt die Stellung des Polhodiekegels gegen den Herpolhodiekegel, so kann man die Bewegung des starren Körpers auch ihrem zeitlichen Verlaufe nach vollkommen getreu nachahmen. Die Aufgabe der Mechanik bei der

Behandlung eines Rotationsproblems reduziert sich also der Hauptsache nach auf die Bestimmung der beiden Polwege.

Um bei dem speziellen Problem, auf das sich unsere Apparate beziehen, das heisst, für den Fall, wo keine äusseren Kräfte wirken, die beiden Polwege zu bestimmen, bedienen wir uns des *Prinzips der lebendigen Kraft und des Prinzips der Flächen*, welche in dem Falle einer *kraftfreien* Drehung eines starren Körpers nichts anderes aussagen, als dass die lebendige Kraft des Körpers und die drei Komponenten seiner doppelten Flächengeschwindigkeit in Bezug auf den Drehpunkt konstant sind, diese Komponenten bezogen auf die Ebenen des im Raume festliegenden Koordinatensystems.

Die doppelte Flächengeschwindigkeit eines um einen festen Punkt drehbaren Körpers in Bezug auf diesen Punkt stimmt übrigens nach ihrer Stellung im Raume, ihrer Grösse und ihrem Sinne zugleich mit dem in Bezug auf denselben Punkt genommenen *Drehungsmoment der Antriebe eines Systems von Stoskräften* überein¹⁾, welche die gerade vorhandene Bewegung des Körpers aus dem Ruhezustande heraus in einem einzigen Augenblick erzeugen würden.

Nennt man daher das System der Antriebe dieser Stoskräfte den Impuls des Körpers und das Drehungsmoment dieses Impulses in Bezug auf den Drehpunkt sein Impulsmoment in Bezug auf den Drehpunkt²⁾, so kann man sagen: Die doppelte Flächengeschwindigkeit eines um einen festen Punkt drehbaren Körpers in Bezug auf diesen Punkt ist nach Stellung, Grösse und Sinn mit dem Impulsmomente des Körpers in Bezug auf denselben Punkt gleich; und die Komponenten dieser doppelten Flächengeschwindigkeit des Körpers können somit auch als die Komponenten seines Impulsmomentes aufgefasst werden.

Demgemäss lässt sich die Eigenschaft der Drehung eines kraftfreien starren Körpers, welche durch das Prinzip der Flächen ausgesprochen wird, auch folgendermassen formulieren:

1) Bekanntlich ist für eine *konstante* Kraft, welche auf einen ruhenden materiellen Punkt einwirkt, das Produkt aus seiner Masse und der von dieser Kraft erregten Geschwindigkeit gleich dem Produkte aus der Kraft und der Zeit, während welcher sie gewirkt hat; und dieses Produkt aus der Kraft und der Dauer ihrer Wirksamkeit bezeichnet man als den Antrieb der Kraft. Bei einer *veränderlichen* Kraft tritt an die Stelle des Produktes aus Kraft und Zeit das Integral, welches über das Produkt aus der Kraft und dem zugehörigen Zeitelement erstreckt ist, und dessen Grenzen den Anfangs- und Endpunkt für die Dauer der Wirksamkeit angeben.

2) Vgl. F. Klein und A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisel. Heft I und II. Leipzig, 1897 und 1898. S. 93 ff.

Bei einem kraftfreien starren Körper, der um einen festen Punkt drehbar ist, bleibt während seiner ganzen Bewegung das Impulsmoment in Bezug auf diesen Punkt seiner Stellung im Raume, seiner Gröfse und seinem Sinne nach konstant.

Bezeichnet man die konstanten Werte der lebendigen Kraft und der Komponenten des Impulsmomentes beziehlich mit h , G_1 , G_2 , G_3 und drückt überdies die lebendige Kraft und die Komponenten des Impulsmomentes durch die Koordinaten p , q , r des instantanen Drehpols aus, diese Koordinaten bezogen auf das bewegliche, das heifst, mit dem starren Körper fest verbundene System, so nehmen die Gleichungen des Prinzips der lebendigen Kraft und der Flächen die Form an¹⁾

$$(1) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h$$

und

$$(2) \quad \begin{cases} Apa_1 + Bqb_1 + Crc_1 = G_1 \\ Apa_2 + Bqb_2 + Crc_2 = G_2 \\ Apa_3 + Bqb_3 + Crc_3 = G_3, \end{cases}$$

wo die vier Gröfsen h , G_1 , G_2 , G_3 Integrationskonstanten sind, welche die soeben angegebene Bedeutung haben. Andererseits sind die Gröfsen A , B , C die drei Hauptträgheitsmomente des Körpers in Bezug auf den Punkt O und besitzen also die Werte

$$(3) \quad \begin{cases} A = \sum_1^n m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ B = \sum_1^n m_i (z_i^2 + x_i^2) \\ C = \sum_1^n m_i (x_i^2 + y_i^2), \end{cases}$$

unter m_i die Masse und unter x_i , y_i , z_i , $i = 1, 2, \dots, n$, die Koordinaten eines beliebigen materiellen Punktes des starren Körpers in Bezug auf das bewegliche System verstanden, während die neun Gröfsen a_k , b_k , c_k , $k = 1, 2, 3$ die Richtungscosinusse der x , y , z -Axe des beweglichen Systems gegen die Axen 1, 2, 3 des festen Systems sind und somit den Gleichungen genügen

1) Vgl. z. B. Rausenberger, Lehrbuch der analytischen Mechanik. Leipzig, 1888. Bd. II, S. 69 ff.

$$(4) \quad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad (5) \quad \begin{cases} b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0. \end{cases}$$

Endlich ist die linke Seite der Gleichung (1), das heißt, die Summe

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

der Ausdruck für die doppelte lebendige Kraft des Körpers und die linken Seiten der Gleichungen (2), das heißt, die drei Summen

$$Ap a_k + Bq b_k + Cr c_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

die Komponenten seines Impulsmomentes in Bezug auf das feste System.

Die vier Gleichungen (1) und (2) enthalten daher in der That den Satz:

Dreht sich ein starrer Körper ohne Einwirkung äußerer Kräfte um einen festen Punkt, so bleibt während der ganzen Bewegung sowohl seine lebendige Kraft wie sein Impulsmoment in Bezug auf den Drehpunkt unverändert, und zwar das letztere seiner Stellung im Raume, seiner Größe und seinem Sinne nach.

Für die weitere Untersuchung werden sich die Größenbeziehungen, die zwischen den sieben Konstanten A, B, C, G_1, G_2, G_3 und h obwalten, als besonders wichtig erweisen. Zunächst möge über dieselben wenigstens so viel bemerkt werden, daß die vier Größen A, B, C und h ihrer Natur nach positiv sind, denn die Größen A, B, C sind die Hauptträgheitsmomente des Körpers in Bezug auf den Punkt O , und h ist der konstante Wert seiner lebendigen Kraft. Hinsichtlich der Größenfolge der drei Hauptträgheitsmomente A, B, C ferner möge vorausgesetzt werden, daß

$$(6) \quad A < B < C$$

sei.¹⁾

Neben dieser Ungleichung (6) besteht dann aber, wie aus den Gleichungen (3) hervorgeht, zwischen den drei Größen A, B, C noch eine andere wichtige Ungleichung. Aus den beiden ersten Gleichungen (3)

1) Der Fall, wo zwei von den Hauptträgheitsmomenten einander gleich sind, ist einer einfacheren Behandlung fähig und möge hier von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben. Ein kurzer Hinweis auf diesen Fall findet sich auf S. 48 f.

folgt nämlich durch Addition und unter Berücksichtigung der dritten Gleichung die Beziehung

$$A + B = C + 2 \sum_1^n m_i z_i^2,$$

welche zeigt, dafs

$$(7) \quad A + B \geq C$$

sein mufs. Selbstverständlich gelten auch die beiden zyklisch entsprechenden Ungleichungen. Doch bieten sie weniger Interesse, da sie bereits eine Folge der Ungleichung (6) sind.

Zweiter Abschnitt.

Die Polhodiekurve.

Für die Beantwortung der Frage nach der Beschaffenheit der Polwege liefert schon die Gleichung (1) einen wichtigen Beitrag. Denn sie ist eine Gleichung zweiten Grades zwischen den Koordinaten p, q, r des Drehpols in Bezug auf das in Bewegung begriffene System; und da sie neben dem konstanten Gliede $2h$ nur Glieder enthält, die in p, q, r quadratisch sind, und überdies die vier Gröfsen A, B, C und h sämtlich positiv sind, so stellt sie ein Ellipsoid dar, das mit dem starren Körper fest verbunden ist, und dessen Hauptaxen mit den Hauptträgheitsaxen des Körpers in Bezug auf den Punkt O zusammenfallen. Dieses Ellipsoid ist ausserdem, wie der Vergleich seiner Gleichung

$$(1) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h$$

mit der Gleichung des Trägheitsellipsoides für den Punkt O :

$$(8) \quad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$$

zeigt, mit diesem Trägheitsellipsoide nicht nur koaxial, sondern auch ähnlich und möge, mit Rücksicht auf die Entstehung seiner Gleichung, das Ellipsoid der lebendigen Kraft genannt werden. Da die Koordinaten p, q, r des Drehpols in Bezug auf das bewegliche System die Gleichung (1) des Ellipsoides der lebendigen Kraft befriedigen, so bildet dieses Ellipsoid einen geometrischen Ort für den Polweg, den der Drehpol in dem starren Körper beschreibt, das heifst, *einen geometrischen Ort für die Polhodiekurve*.

Einen zweiten geometrischen Ort für diese Kurve liefern die drei Gleichungen (2) des Prinzips der Flächen. Freilich enthalten diese drei Gleichungen in den neun Richtungscosinus a_k, b_k, c_k , $k = 1, 2, 3$ noch eine Beziehung auf das im Raume festliegende Koordinatensystem,

welche in der Gleichung der gesuchten Fläche nicht vorkommen darf. Man eliminiere daher diese neun Cosinus, indem man die drei Gleichungen des Prinzips der Flächen quadriert und die entstehenden Gleichungen unter Berücksichtigung der Gleichungen (4) und (5) addiert. Auf diese Weise erhält man die Gleichung

$$(9) \quad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = G^2,$$

wobei zur Abkürzung

$$(10) \quad G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = G^2$$

gesetzt ist, und wo also G die Größe der doppelten Flächengeschwindigkeit des Körpers oder, was dasselbe ist, die Größe seines Impulsmomentes bedeutet. Nun stellt aber die Gleichung (9) wiederum ein mit dem starren Körper fest verbundenes Ellipsoid dar, und zwar ein Ellipsoid, das dem Ellipsoid der lebendigen Kraft coaxial ist; wir wollen es als das Ellipsoid der Flächen bezeichnen. Beide Ellipsoide schneiden sich in einer Raumkurve vierter Ordnung der ersten Art; und diese Kurve muß mit Rücksicht auf die mechanische Bedeutung der Polhodie *stets reell* sein und besteht, da die beiden Ellipsoide coaxial sind, aus zwei kongruenten Zweigen, von denen aber zufolge der obigen Festsetzung über die Konstruktion des Drehpols *nur derjenige Zweig die Polhodiekurve bildet*, für welchen die Drehung des Körpers um den von O ausgehenden Leitstrahl der Kurve *in positivem Sinne* erfolgt (vgl. S. 5).

Die Gleichung des *Polhodiekegels* erhält man, wenn man aus den Gleichungen der Ellipsoide der lebendigen Kraft und der Flächen, deren partieller Schnitt die Polhodiekurve ist, das heißt, aus den Gleichungen

$$(1) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h$$

und

$$(9) \quad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = G^2$$

durch lineare Verknüpfung eine *in p, q, r homogene Gleichung* ableitet, etwa indem man diese Gleichungen beziehlich mit den Faktoren $\frac{G^2}{2h}$ und -1 multipliziert und dann addiert, wodurch sich ergibt

$$(11) \quad A\left(\frac{G^2}{2h} - A\right)p^2 + B\left(\frac{G^2}{2h} - B\right)q^2 + C\left(\frac{G^2}{2h} - C\right)r^2 = 0.$$

Diese Gleichung stellt in der That eine Kegelfläche dar, deren Scheitel in O liegt, und diese Kegelfläche geht überdies, mit Rücksicht auf die Entstehung ihrer Gleichung, durch die Schnittkurve der beiden Ellip-

soide (1) und (9) hindurch. Die Gleichung (11) ist also wirklich die gesuchte Gleichung des Polhodiekegels und liefert, da sie vom zweiten Grade ist, den Satz:

Bei der kraftfreien Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt ist der Polhodiekegel ein *Kegel zweiter Ordnung*.

Beachtet man noch, daß der Polhodiekegel ebenso wie die Polhodiekurve notwendig reell sein muß, so kann man aus der Gleichung (11) eine wichtige Folgerung über die Größe des Verhältnisses $\frac{G^2}{2h}$ der rechten Seiten der Gleichungen (9) und (1) herleiten. Damit nämlich die Gleichung (11) einen reellen Kegel darstelle, dürfen nicht alle ihre Koeffizienten dasselbe Vorzeichen haben, woraus mit Rücksicht auf (6) folgt, daß

$$(12) \quad A \leq \frac{G^2}{2h} \leq C$$

sein muß. Man erhält also den Satz:

Bei der Drehung des kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt liegt das Verhältnis des Quadrats seines Impulsmomentes zu seiner doppelten lebendigen Kraft zwischen seinem größten und kleinsten Trägheitsmoment in Bezug auf den Drehpunkt.

Dritter Abschnitt.

Die Herpolhodiekurve.

Um andererseits die Herpolhodiekurve, das heißt, denjenigen Polweg zu bestimmen, der seine Lage im Raum unverändert beibehält, wird man naturgemäß Gleichungen heranzuziehen haben, welche eine Beziehung auf das feste Koordinatensystem enthalten. Solche Gleichungen sind aber die drei Gleichungen des Prinzips der Flächen

$$(2) \quad \begin{cases} G_1 = A p a_1 + B q b_1 + C r c_1 \\ G_2 = A p a_2 + B q b_2 + C r c_2 \\ G_3 = A p a_3 + B q b_3 + C r c_3, \end{cases}$$

in denen die Größen p, q, r die Koordinaten des instantanen Drehpols in Bezug auf das bewegliche System bezeichnen. Für die geometrische Deutung dieser Gleichungen ist es beachtenswert, daß sie ihrer Form nach genau mit den Gleichungen

$$(13) \quad \begin{cases} x_1 = x a_1 + y b_1 + z c_1 \\ x_2 = x a_2 + y b_2 + z c_2 \\ x_3 = x a_3 + y b_3 + z c_3 \end{cases}$$

übereinstimmen, mittelst deren sich die Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes im festen Koordinatensystem durch die Koordinaten x, y, z desselben Punktes im beweglichen System ausdrücken. Den Koordinaten

$$x, y, z$$

in Bezug auf das bewegliche System entsprechen dabei in den Gleichungen (2) die Größen

$$Ap, Bq, Cr,$$

während die Koordinaten

$$x_1, x_2, x_3$$

in Bezug auf das feste System durch die konstanten Komponenten

$$G_1, G_2, G_3$$

des Impulsmomentes vertreten werden. Die Gleichungen (2) zeigen daher, daß der Punkt I des beweglichen Systems, der in diesem die veränderlichen Koordinaten

$$Ap, Bq, Cr$$

besitzt, im festen System die konstanten Koordinaten

$$G_1, G_2, G_3$$

hat, also absolut fest im Raume ist und die konstanten Komponenten des Impulsmomentes zu Koordinaten hat. Der Punkt I liegt somit auf dem *Lote*, das man auf der Ebene des Impulsmomentes im Drehpunkte des Körpers errichten kann; wir wollen es die Impulsaxe des Körpers nennen. Andererseits ist der *Abstand* des Punktes I vom Drehpunkte mit Rücksicht auf (10) nichts anderes als die konstante Impulsstärke G des Körpers. Und endlich ist der *Sinn der Strecke* OI von der Art, daß für einen diese Strecke entlang blickenden Beschauer das Moment eine Drehung in positivem Sinne hervorzurufen strebt (vgl. S. 5). Der Punkt I charakterisiert also durch seine Lage die Stellung, die Größe und den Sinn des Impulsmomentes vollständig und möge daher als der Impulspol der Bewegung bezeichnet werden. Ferner möge die Strecke OI , von dem Drehpunkte O des Körpers nach dem Impulspole I der Bewegung gezogen, die Strecke des Impulsmomentes heißen. Ihre Richtungscosinus gegen das feste System besitzen die Werte

$$(14) \quad \cos \alpha_1 = \frac{G_1}{G}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{G_2}{G}, \quad \cos \alpha_3 = \frac{G_3}{G}.$$

Der Strecke OI des Impulsmomentes kommt nun aber auch eine wichtige Bedeutung für das bewegliche System zu. Die Koordinaten

Ap , Bq , Cr ihres Endpunktes, des Impulspoles I , in Bezug auf das bewegliche System treten nämlich zugleich als Koeffizienten in der Gleichung der Tangentialebene auf, die sich im instantanen Drehpol p , q , r des Körpers an das Ellipsoid der lebendigen Kraft legen läßt, denn diese Gleichung lautet:

$$(15) \quad Ap\xi + Bq\eta + Cr\xi = 2h,$$

worin liegt, daß die Strecke OI des Impulsmomentes in die Linie des Lotes fällt, das man vom Drehpunkte O des Körpers auf diese Tangentialebene herablassen kann. Da aber andererseits die Strecke OI des Impulsmomentes während der ganzen Bewegung des Körpers im Raume fest bleibt, so muß auch diese Tangentialebene, wenigstens ihre *Stellung im Raume* beibehalten. Sie kann aber auch ihren *Abstand* vom Drehpunkte O nicht verändern; denn aus der Gleichung (15) ergibt sich für diesen Abstand der Ausdruck

$$\delta = \frac{2h}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}},$$

und dieser reduziert sich wegen der Gleichung (9) auf

$$(16) \quad \delta = \frac{2h}{G},$$

ist also wirklich konstant.

Die Tangentialebene des Ellipsoids der lebendigen Kraft, konstruiert im Drehpole des Körpers, hat somit nicht nur eine konstante Stellung gegen das feste Koordinatensystem, sondern sie liegt überhaupt im Raume fest und möge daher als die *invariable Ebene* bezeichnet werden.

Ihre Lage ist fixiert durch die Gleichung (16) für ihren Abstand δ vom Anfangspunkte und durch die Gleichungen (14), welche die Richtungscosinus ihrer Normale gegen das feste System angeben.

Nun dreht sich, wie wir gesehen haben, der starre Körper und mit ihm das Ellipsoid der lebendigen Kraft in jedem Augenblicke um den Leitstrahl des instantanen Drehpols, das heißt nach dem Obigen, um den Berührungsradius der invariablen Ebene. Und da dieser Berührungsradius, sofern er nicht gerade mit einer der drei Hauptaxen des Ellipsoids zusammenfällt, nicht auf der zugehörigen Tangentialebene senkrecht stehen kann, so tritt durch die Drehung des Ellipsoids um seinen Berührungsradius in jedem Augenblick ein neuer Ellipsoidpunkt mit der invariablen Ebene in Berührung, und der neue Berührungsradius ist dann immer für den folgenden Augenblick wieder die instantane Drehaxe des Körpers. Hieraus folgt:

Bei der Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt wälzt sich das Ellipsoid der lebendigen Kraft, das seinen Mittelpunkt dauernd in dem festen Drehpunkt des Körpers hat, ohne zu gleiten, auf der invariablen Ebene fort.

Dieser Satz liefert zugleich eine anschauliche geometrische Erzeugung der Herpolhodiekurve. Denn da die Herpolhodie als die Kurve definiert war, welche der Drehpol des Körpers in dem festen System durchläuft, und dieser Drehpol in jedem Augenblick durch den Berührungspunkt der invariablen Ebene mit dem Ellipsoid der lebendigen Kraft dargestellt wird, so ist die Herpolhodiekurve der geometrische Ort aller Berührungspunkte, die das Ellipsoid der lebendigen Kraft bei seinem Abrollen auf der invariablen Ebene ergiebt, womit insbesondere der Satz bewiesen ist:

Bei der Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt ist die Herpolhodie eine ebene Kurve.

Vierter Abschnitt.

Das Büschel der Polhodiekegel. Die drei zerfallenden Kegel.

Denkt man sich in der Gleichung des Polhodiekegels

$$(11) \quad A\left(\frac{G^2}{2h} - A\right)p^2 + B\left(\frac{G^2}{2h} - B\right)q^2 + C\left(\frac{G^2}{2h} - C\right)r^2 = 0,$$

die man auch in der Form schreiben kann

$$(17) \quad \frac{G^2}{2h}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - (A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2) = 0,$$

das Verhältnis $\frac{G^2}{2h}$ veränderlich, so stellt sie ein ganzes Büschel von Kegeln zweiter Ordnung dar. Die Kegel dieses Büschels sind, wie die Gleichungsform (11) zeigt, sämtlich koaxial, und zwar fallen ihre Hauptaxen mit den Hauptträgheitsaxen des Körpers in Bezug auf den Punkt O zusammen.

Andererseits aber haben die Kegel des Büschels, wie man aus der Gleichungsform (17) entnimmt, außer ihrem Scheitel O keinen reellen Punkt mit einander gemein. Da nämlich jeder gemeinsame Punkt irgend zweier Flächen eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung sämtlichen Flächen des Büschels angehört, und nach der Gleichung (17) in dem Kegelbüschel auch die beiden imaginären Kegel enthalten sind, deren Gleichungen lauten

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 0, \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = 0,$$

und welche aufser ihrem gemeinsamen Scheitel O überhaupt keinen reellen Punkt darbieten, so können auch die reellen Kegel des Büschels ausser dem Punkte O keinen reellen Punkt mit einander gemein haben.

Endlich geht durch jeden Punkt des Raumes *eine* und mit alleiniger Ausnahme des gemeinsamen Scheitels aller Kegelflächen *auch nur eine* Kegelfläche des Büschels hindurch. Denn, ist nicht gerade $p = q = r = 0$, so bestimmt die Gleichung (17) bei gegebenem p, q, r eindentig den Parameter $\frac{G^2}{2h}$ der durch den Punkt p, q, r gehenden Fläche des Büschels.

Man hat also den Satz:

Sämtliche Polhodiekegel, welche einem gegebenen Drehpunkte O eines starren Körpers zugehören, bilden ein Büschel von koaxialen Kegeln zweiter Ordnung, deren Hauptaxen mit den Hauptträgheitsaxen des Körpers in Bezug auf den Punkt O zusammenfallen, und welche aufser ihrem Scheitel O keinen reellen Punkt mit einander gemein haben. Dabei geht durch jeden Punkt des Raumes mit Ausnahme des Punktes O nur eine aber auch stets eine Kegelfläche des Büschels hindurch.

Wie jedes Büschel von konzentrischen Kegelflächen zweiter Ordnung enthält auch das Büschel der Polhodiekegel drei in ein Ebenenpaar zerfallende Kegel zweiter Ordnung. Die Gleichungen dieser drei Ebenenpaare erhält man, wenn man über den Parameter des Büschels, das heisst, über das Verhältnis $\frac{G^2}{2h}$, nach einander in der Weise verfügt, daß immer eine von den drei in der Gleichung (11) auftretenden Differenzen verschwindet. Man hat somit dieses Verhältnis der Reihe nach den drei Hauptträgheitsmomenten gleich zu machen, also nach einander zu setzen:

$$(18) \quad \frac{G^2}{2h} = A, \quad (19) \quad \frac{G^2}{2h} = B, \quad (20) \quad \frac{G^2}{2h} = C,$$

wodurch die Gleichung (11) des Polhodiekegels in die Gleichungen übergeht:

$$B(A - B)q^2 + C(A - C)r^2 = 0$$

$$A(B - A)p^2 + C(B - C)r^2 = 0$$

$$A(C - A)p^2 + B(C - B)q^2 = 0.$$

Von den drei Ebenenpaaren, welche durch diese drei Gleichungen dargestellt werden, ist allerdings *nur eins reell*. Schreibt man nämlich unter Berücksichtigung der Ungleichungen (6) die Gleichungen der

drei Ebenenpaare in der Weise, daß in den Klammern nur positive Differenzen auftreten, wodurch die Gleichungen die Form annehmen

$$(21) \quad B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 = 0$$

$$(22) \quad A(B-A)p^2 - C(C-B)r^2 = 0$$

$$(23) \quad A(C-A)p^2 + B(C-B)q^2 = 0,$$

so sieht man in der That, daß das erste und dritte Ebenenpaar imaginär ist, und daß bei jedem von ihnen *nur seine Doppellinie reell ist*. Bei dem Ebenenpaar (21) wird diese Doppellinie durch die Gleichungen

$$(24) \quad q^2 = 0 \quad \text{und} \quad r^2 = 0$$

dargestellt und fällt also mit der Axe des kleinsten Trägheitsmoments A , das heißt, mit der größten Axe des Trägheitsellipsoids und des Ellipsoids der lebendigen Kraft zusammen. Bei dem Ebenenpaar (23) lauten die Gleichungen der Doppellinie

$$(25) \quad p^2 = 0 \quad \text{und} \quad q^2 = 0;$$

die Doppellinie ist daher in diesem Falle die Axe des größten Trägheitsmoments, das heißt, die kleinste Axe des Trägheitsellipsoids und des Ellipsoids der lebendigen Kraft.

Man kann dies auch so ausdrücken: *In den beiden Fällen (21) und (23) eines imaginären Ebenenpaares ist der Polhodiekegel in eine gerade Linie zusammengeschrumpft*; die instantane Axe behält also ihre Lage in dem starren Körper bei. Da sich ferner in diesen beiden Fällen dann auch die Polhodiekurve in einen Punkt, nämlich in einen Endpunkt der größten oder kleinsten Axe des Ellipsoids der lebendigen Kraft zusammengezogen hat, und somit gerade der oben ausgeschlossene Ausnahmefall eintritt, wo der Berührungsradius der invariablen Ebene, um den die Rotation erfolgt, auf dieser Ebene senkrecht steht, so kann durch die Drehung auch kein neuer Punkt der invariablen Ebene mit einem solchen des Ellipsoids der lebendigen Kraft in Berührung treten. Der Berührungspunkt dieser Ebene, das heißt, der Drehpol des Körpers, bleibt also auch im Raume fest, und *die Herpolhodiekurve ist somit ebenso wie die Polhodiekurve in einen Punkt, der Herpolhodiekegel ebenso wie der Polhodiekegel in eine gerade Linie zusammengeschrumpft*. Dabei wird die gerade Linie, welche den Herpolhodiekegel vertritt, durch das Lot gebildet, das man vom Drehpunkte des Körpers auf die invariable Ebene fallen kann, während der Fußpunkt dieses Lotes die Herpolhodiekurve ersetzt.

Hieraus folgt bereits, daß der Abstand δ der Herpolhodieebene von dem Drehpunkte O des Körpers in diesen beiden Fällen gleich der größten oder kleinsten Halbaxe des Ellipsoids der lebendigen Kraft sein wird. Dies zeigt man aber auch leicht analytisch. Nach dem Obigen entsprechen den geraden Linien (24) und (25) diejenigen Werte der Impulsstärke G , welche den beiden Gleichungen

$$(18) \quad \frac{G^2}{2h} = A \quad \text{und} \quad (20) \quad \frac{G^2}{2h} = C$$

Genüge leisten. Bezeichnet man daher die Halbaxen des Ellipsoids der lebendigen Kraft, das durch die Gleichung

$$(1) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h$$

dargestellt wurde, mit a, b, c , setzt also

$$(26) \quad a = \sqrt{\frac{2h}{A}}, \quad b = \sqrt{\frac{2h}{B}}, \quad c = \sqrt{\frac{2h}{C}},$$

oder, was dasselbe ist,

$$(27) \quad A = \frac{2h}{a^2}, \quad B = \frac{2h}{b^2}, \quad C = \frac{2h}{c^2},$$

so verwandeln sich die Gleichungen (18) und (20) in:

$$\frac{G^2}{2h} = \frac{2h}{a^2} \quad \text{und} \quad \frac{G^2}{2h} = \frac{2h}{c^2}$$

oder in:

$$\frac{2h}{G} = a \quad \text{und} \quad \frac{2h}{G} = c$$

oder endlich mit Rücksicht auf (16) in:

$$(28) \quad \delta = a \quad \text{und} \quad (29) \quad \delta = c,$$

woraus in der That hervorgeht, daß für die beiden extremen Werte des Verhältnisses $\frac{G^2}{2h}$ das Ellipsoid der lebendigen Kraft mit einem Endpunkte seiner größten oder kleinsten Axe die invariable Ebene berührt, daß also das Ellipsoid um seine in diesem Falle im Raume fest liegende größte oder kleinste Axe und zwar mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert.

Man pflegt dies so auszudrücken: Die Axen des größten und kleinsten Hauptträgheitsmoments sind zwei „permanente“ („natürliche“, „freie“) Drehaxen des Körpers. Das soll heißen: Wenn der Körper in irgend einem Augenblick um eine dieser beiden Axen rotiert, so setzt er die Rotationsbewegung um diese Drehaxe, die dann sowohl im Körper wie im Raume fest bleibt, mit konstanter

18. Die Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt.

Winkelgeschwindigkeit fort, so lange nicht eine äußere Kraft störend auf ihn einwirkt, so lange also der Körper wirklich kraftfrei bleibt.

Nach Ausscheidung dieser beiden Fälle eines imaginären Ebenenpaares bleibt von den drei Fällen (18), (19), (20) noch der Fall übrig, wo

$$(19) \quad \frac{G^2}{2h} = B$$

ist, wo also wegen (27) und (16)

$$(30) \quad \delta = b$$

ist, das heißt, wo der Abstand δ des Drehpunktes O von der invariablen Ebene gleich der mittleren Halbaxe b des Ellipsoids der lebendigen Kraft ist. Hier wird der Polhodiekegel durch die Gleichung (22) dargestellt, die man auch in der Form schreiben kann

$$(31) \quad \frac{r}{p} = \pm \sqrt{\frac{A(B-A)}{C(C-B)}}$$

Der Polhodiekegel ist also in ein reelles Ebenenpaar ausgeartet, dessen Ebenen durch die mittlere Axe des Ellipsoids der lebendigen Kraft hindurchgehen und mit der größten Axe des Ellipsoids, das heißt, mit der x -Axe, zwei entgegengesetzt gleiche Neigungswinkel λ einschließen, die sich aus der Gleichung

$$(32) \quad \operatorname{tg} \lambda = \pm \sqrt{\frac{A(B-A)}{C(C-B)}}$$

bestimmen.

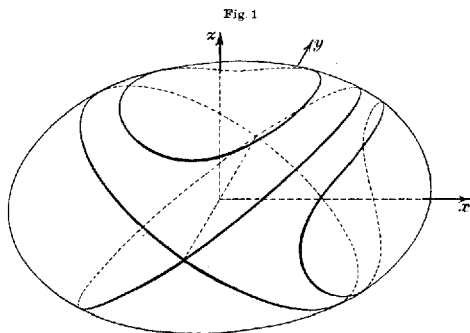
Fünfter Abschnitt.

Das System der Polhodiekurven.

a) Das System von Polhodiekurven, das einem konstanten Werte der lebendigen Kraft zugehört.

Wir gehen nunmehr zu der Betrachtung aller Polhodiekurven über, welche einem gegebenen starren Körper in Bezug auf einen gegebenen festen Punkt zugehören. Wir wissen bereits (vgl. S. 10), daß jede von diesen Polhodiekurven einen Zweig einer Raumkurve vierter Ordnung der ersten Art bildet, welche durch die beiden Gleichungen (1) und (9) oder, wenn man will, durch die Gleichungen (1) und (11) dargestellt wird. Hält man in diesen Gleichungen einstweilen den Wert der lebendigen Kraft h konstant und läßt nur die Stärke G des Impulsmomentes variieren, so bekommt man ein Bündel von Raumkurven vierter Ordnung der ersten Art, nämlich die Gesamt-

heit derjenigen Raumkurven, die aus dem Ellipsoide der lebendigen Kraft mit dem Parameter h durch das soeben betrachtete und durch die Gleichung (11) (oder (17)) dargestellte Büschel von Polhodiekegeln



ausgeschnitten werden.¹⁾ Und die einzelnen Zweige dieses Büschels von Raumkurven bilden dann eben dasjenige System von Polhodiekurven, das dem Werte h der lebendigen Kraft zugehört (vgl. Fig. 1).

a) Die drei Grenzfälle, insbesondere der Fall der trennenden Polhodie.

In diesem System von Polhodiekurven sind wiederum *diejenigen drei Kurven ausgezeichnet, die den drei in ein Ebenenpaar zerfallenden Kegeln zweiter Ordnung entsprechen*. Den beiden imaginären Ebenenpaaren ist, wie schon oben erwähnt, je eine Polhodiekurve zugeordnet, die in einen Punkt zusammengeschrunpft ist und je einen Endpunkt der größten oder kleinsten Axe des Ellipsoids der lebendigen Kraft bildet. Dem reellen Ebenenpaar dagegen entsprechen zwei von der y -Axe begrenzte Halbellipsen, die den beiden Ellipsen angehören, welche durch die Ebenen (31) aus dem Ellipsoide ausgeschnitten werden. Diese beiden Ellipsen trennen die Polhodiekurven, welche die x -Axe umschließen, von denen, welche die z -Axe umschließen: die zugehörige Polhodiekurve möge daher als „trennende Polhodie“

1) Wir verstehen dabei allgemein unter einem *Büschel von Raumkurven vierter Ordnung der ersten Art* das einfach unendliche System von Raumkurven, welches durch ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung aus einer diesem Büschel nicht angehörenden Fläche zweiter Ordnung ausgeschnitten wird.

bezeichnet werden.¹⁾ Die Neigungswinkel λ ihrer beiden Ebenen gegen die xy -Ebene stehen übrigens zu den Neigungswinkeln μ der Kreisschnitte des Ellipsoids gegen die xy -Ebene in einer engen Beziehung.²⁾ Führt man nämlich in Gleichung (32) an Stelle von A, B, C ihre Werte aus (27) ein, so nimmt die Gleichung (32) die Form an

$$(33) \quad \operatorname{tg} \lambda = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}}.$$

Andererseits folgt aus der Gleichung der beiden „Hauptkreisschnitte des Ellipsoids“, welche lautet³⁾

$$(34) \quad \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) z^2 = 0,$$

für die Neigungswinkel μ der Kreisschnitte gegen die xy -Ebene die Gleichung

$$(35) \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{z}{x} = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}}.$$

Die Winkel λ und μ befriedigen also die Proportion

$$(36) \quad \operatorname{tg} \lambda : \operatorname{tg} \mu = c : a,$$

und diese gestattet eine einfache geometrische Deutung. Man denke sich nämlich in der xz -Ebene, der die Winkel λ und μ angehören, die Ellipse

$$(37) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gezeichnet, welche diese Ebene aus dem Ellipsoid der lebendigen Kraft ausschneidet (vgl. Fig. 2), trage innerhalb ihrer Ebene an die x -Axe die Winkel λ und μ an und bringe den freien Schenkel des Winkels λ zum Schnitt mit der Ellipse in T , fälle von T das Lot TQ auf die x -Axe und verlängere es über T hinaus bis zum Schnitt mit dem freien Schenkel des Winkels μ in U . Dann verhält sich

$$\operatorname{tg} \lambda : \operatorname{tg} \mu = QT : QU,$$

1) Vgl. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper, deutsch von Schapp. Leipzig, 1898. Bd. II, S. 107.

2) Vgl. die oben zitierte Dissertation von Hefs. S. 8.

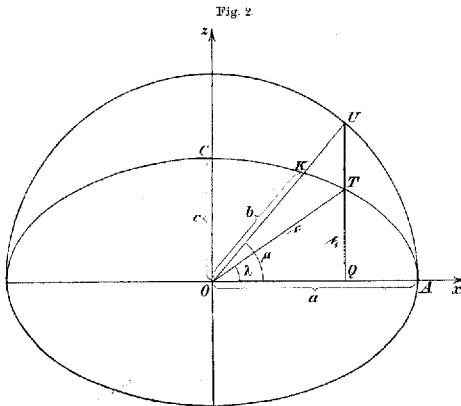
3) Siehe zum Beispiel: Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes. Teil I. Vierte Auflage. Leipzig, 1898. S. 130 f.

und wegen (36) besteht daher die Proportion

$$QT : QU = c : a,$$

welche zeigt, daß der Punkt U auf dem Kreise liegt, der die gezeichnete Ellipse in den Endpunkten ihrer großen Axe berührt. Man hat also den Satz:

Verzeichnet man in der Ebene der größten und kleinsten Axe des Ellipsoids der lebendigen Kraft außer der Ellipse, die diese Ebene aus dem Ellipsoide ausschneidet, die Spuren der beiden Hauptkreisschnitte des Ellipsoids, so



sind die beiden Winkel, welche diese Spuren mit der großen Axe der Ellipse einschließen, die exzentrischen Anomalieen der Punkte, in denen die Ellipse von der trennenden Polhodie getroffen wird.

Dieser Satz ergibt dann für die große Halbaxe der trennenden Polhodie die folgende Konstruktion:

Man schlage um den Mittelpunkt O der Ellipse

$$(37) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

welche durch die xz -Ebene aus dem Ellipsoide der lebendigen Kraft ausgeschnitten wird, innerhalb ihrer Ebene mit dem Radius der Hauptkreisschnitte des Ellipsoids, das heißt, mit seiner mittleren Halbaxe b ,

den Kreis und verbinde den Mittelpunkt O der Ellipse mit einem von ihren vier Schnittpunkten mit jenem Kreise, er heiße K ; verlängere die Linie OK , bis sie gleich der großen Halbaxe a der Ellipse wird, bis U , und fälle von U das Lot auf die x -Axe, das die Ellipse in T schneiden mag, so ist das Stück $OT = c$ seiner GröÙe und Lage nach die halbe große Axe der trennenden Polhodie, während die halbe kleine Axe nach GröÙe und Lage mit der mittleren Halbaxe (b) des Ellipsoids der lebendigen Kraft zusammenfällt.

Dafs wirklich die in der xz -Ebene liegende Halbaxe OT der trennenden Polhodie gröÙer ist als die in der y -Axe liegende Halbaxe b , folgt daraus, dafs der zu dem Leitstrahl OT der Ellipse (37) gehörende Polarwinkel λ stets kleiner ist als der zu dem Leitstrahl $OK = b$ gehörende Polarwinkel μ , so lange nicht $b = a$ oder $b = c$ wird; diese beiden Fälle aber sind durch die Ungleichungen (6) von der Betrachtung ausgeschlossen.

Natürlich kann man die Länge c der halben großen Axe OT der trennenden Polhodie auch leicht durch Rechnung finden. Dem Obigen zufolge ist die trennende Polhodie eine Hälfte der zerfallenden Raumkurve vierter Ordnung, die aus dem Ellipsoide der lebendigen Kraft

$$(1) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h$$

durch das Ebenenpaar

$$(22) \quad A(B - A)p^2 - C(C - B)r^2 = 0$$

ausgeschnitten wird (vgl. Fig. 1). Um nun aber über die Halbaxenlängen der beiden Ellipsen, in welche diese Kurve zerfällt, Aufschluß zu erhalten, stelle man zunächst die Gleichung desjenigen Cylinders auf, der durch die Kurve hindurchgeht, und dessen Erzeugende der x -Axe parallel laufen. Dazu eliminiere man aus den Gleichungen (1) und (22) die GröÙe p , indem man diese Gleichungen beziehlich mit den Faktoren $B - A$ und -1 multipliziert und dann addiert, wodurch sich die Gleichung ergibt

$$(38) \quad B(B - A)q^2 + C(C - A)r^2 = 2h(B - A),$$

welche den in Rede stehenden Cylinder darstellt. Ihre Form zeigt, dafs der Cylinder elliptisch ist und die Halbaxen besitzt:

$$(39) \quad b_1 = \sqrt{\frac{2h}{B}} = b, \quad c_1 = \sqrt{\frac{2h(B - A)}{C(C - A)}}.$$

Diese Halbaxen b_1 und c_1 des elliptischen Cylinders sind dabei zugleich die Halbaxen derjenigen Ellipse, welche die Projektion der

beiden Polhodicellipsen auf die yz -Ebene bildet. Da aber die beiden Ebenen der trennenden Polhodie mit der yz -Ebene den Winkel $\frac{\pi}{2} - \lambda$ einschließen, so werden die Halbaxen b und c der trennenden Polhodie

$$(40) \quad b = b_1 = b$$

und

$$(41) \quad c = \frac{c_1}{\sin \lambda} = \sqrt{\frac{2h(B-A)}{C(C-A)}} \frac{1}{\sin \lambda},$$

wobei λ durch die Gleichung

$$(32) \quad \operatorname{tg} \lambda = \pm \sqrt{\frac{A(B-A)}{C(C-B)}}$$

bestimmt ist. Es wird daher

$$\frac{1}{\sin \lambda} = \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \lambda}} = \sqrt{\frac{A(B-A) + C(C-B)}{A(B-A)}};$$

und bei Einführung dieses Wertes verwandelt sich die Gleichung (41) in:

$$c = \sqrt{\frac{2h}{CA} \frac{AB - A^2 + C^2 - CB}{C - A}}$$

oder, falls man die Division im zweiten Bruche ausführt, in:

$$(42) \quad c = \sqrt{2h \frac{C+A-B}{CA}},$$

wofür man wegen (27) auch schreiben kann:

$$(43) \quad c = \sqrt{a^2 + c^2 - \frac{a^2 c^2}{b^2}}.$$

Um endlich zu zeigen, daß dieser Ausdruck größer als b ist, bilde man die Differenz $c^2 - b^2$. Es wird

$$c^2 - b^2 = a^2 + c^2 - \frac{a^2 c^2}{b^2} - b^2,$$

das heißt

$$(44) \quad c^2 - b^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{b^2}.$$

Dieser Ausdruck aber ist sicher positiv; denn die Ungleichungen (6) ziehen wegen (27) die Ungleichungen nach sich

$$(45) \quad a > b > c.$$

Folglich ist wirklich

$$(46) \quad c > b.$$

β) Die beiden Hauptfälle.

Nach Erledigung dieser drei Grenzfälle, in denen die Polhodiekurve in einen Punkt oder in zwei Halbellipsen ausgeartet ist, bleiben jetzt noch *die beiden Hauptfälle* zu behandeln, wo der Parameter $\frac{G^2}{2h}$ des Polhodiekegels *zwischen den beiden kleineren Hauptträgheitsmomenten A und B oder zwischen den beiden größeren Hauptträgheitsmomenten B und C* liegt, wo also eine von den beiden Ungleichungen befriedigt wird:

$$(47) \quad A < \frac{G^2}{2h} < B < C$$

und

$$(48) \quad A < B < \frac{G^2}{2h} < C,$$

oder was wegen (27) und (16) dasselbe ist, die beiden Fälle, wo zwischen dem Abstände δ des festen Punktes O von der invariablen Ebene und den Halbaxen des Ellipsoids der lebendigen Kraft die Ungleichungen bestehen:

$$(49) \quad a > \delta > b > c$$

und

$$(50) \quad a > b > \delta > c.$$

Nun wurde die Polhodiekurve oben definiert als partieller Schnitt des Ellipsoids der lebendigen Kraft und des Ellipsoids der Flächen, nämlich als ein Zweig der Raumkurve vierter Ordnung, in der sich die beiden Ellipsoide schneiden, deren Gleichungen lauteten:

$$(1) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h$$

$$(9) \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2.$$

Faßt man in diesen Gleichungen für den Augenblick nicht nur wie bisher die lebendige Kraft h , sondern auch die Stärke G des Impulsmomentes als fest gegeben auf, so erhält man *eine einzelne Kurve* des oben betrachteten Büschels von Raumkurven vierter Ordnung der ersten Art. Um über die Form und Lage dieser Raumkurve mit den festen Parameterwerten h und G Aufschluß zu erhalten, benutze man die abwickelbaren Flächen zweiter Ordnung, auf denen die Raumkurve gelegen ist. Man erhält die Gleichungen aller Flächen des Büschels von Flächen zweiter Ordnung, welche durch die Raumkurve vierter Ordnung h , G hindurchgehen, durch lineare Verknüpfung der Gleichungen (1) und (9). Wie jedes Büschel von Flächen zweiter Ordnung enthält nun dieses Büschel *vier* abwickelbare Flächen zweiter Ordnung.

Eine solche abwickelbare Fläche zweiter Ordnung ist der zu der Raumkurve h, G und den beiden in ihr enthaltenen Polhodiekurven gehörige Polhodiekegel, dessen Gleichung (11) bereits oben aus den Gleichungen (1) und (9) durch lineare Verknüpfung abgeleitet wurde. Die drei anderen abwickelbaren Flächen des Büschels sind drei Cylinderflächen zweiter Ordnung, deren Betrachtung dazu dienen kann, eine genaue Anschauung von der Raumkurve vierter Ordnung h, G zu vermitteln. Man findet die Gleichungen dieser drei Cylinderflächen zweiter Ordnung, wenn man aus den Gleichungen (1) und (9) der Reihe nach die drei Größen p, q und r eliminiert, wodurch man die drei Gleichungen erhält

$$B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 = 2h\left(\frac{G^2}{2h} - A\right),$$

$$C(C-B)r^2 + A(A-B)p^2 = 2h\left(\frac{G^2}{2h} - B\right),$$

$$A(A-C)p^2 + B(B-C)q^2 = 2h\left(\frac{G^2}{2h} - C\right).$$

Diese Gleichungen schreibe man mit Rücksicht auf die Ungleichungen (47) und (48) in der Form

$$(51) \quad B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 = 2h\left(\frac{G^2}{2h} - A\right),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (52a) \quad A(B-A)p^2 - C(C-B)r^2 = 2h\left(B - \frac{G^2}{2h}\right), \\ (52b) \quad C(C-B)r^2 - A(B-A)p^2 = 2h\left(\frac{G^2}{2h} - B\right), \end{array} \right.$$

$$(53) \quad A(C-A)p^2 + B(C-B)q^2 = 2h\left(C - \frac{G^2}{2h}\right),$$

wo jetzt alle in den Klammern auftretenden Differenzen positiv sind, vorausgesetzt, daß man von den beiden Gleichungsformen (52a) und (52b) die erstere Form (52a) wählt, in dem Falle, wo

$$(a) \quad \frac{G^2}{2h} < B, \quad \text{also} \quad \delta > b$$

ist, während man die zweite Form (52b) zu benutzen hat, wenn

$$(b) \quad \frac{G^2}{2h} > B, \quad \text{also} \quad \delta < b$$

ist. Hieraus folgt dann, daß die beiden Cylinder (51) und (53) elliptisch sind, daß dagegen der durch die Gleichung (52a) oder (52b) dargestellte Cylinder hyperbolisch ist und überdies die x - oder z -Axe schneidet, je nachdem die Ungleichungen (a) oder (b) gelten.

Natürlich kann man die Gleichungen (51) bis (53) auch als die Gleichungen dreier ebenen Kurven ansehen, nämlich als die Gleichungen für die Projektionen der Raumkurve h, G auf die yz -, zx - und xy -Ebene. Bei dieser Auffassung sagen die Gleichungen aus, daß die Projektionen der Raumkurve h, G auf die yz - und xy -Ebene Ellipsen oder Stücke von Ellipsen sind, daß aber ihre Projektion auf die zx -Ebene durch Stücke einer Hyperbel gebildet wird, deren reelle Axe, in dem Falle (a) mit der x -Axe, in dem Falle (b) mit der z -Axe zusammenfällt.

γ) Die Projektionen des betrachteten Systems von Polhodiekurven auf die Hauptträgheitsebenen.

Nach dieser Orientierung über die verschiedenen Kurvenformen, welche bei den Polhodiekurven eines Körpers auftreten können, kehren wir zur Untersuchung des ganzen Büschels von Raumkurven vierter Ordnung zurück, dessen Zweige die Polhodiekurven bilden. Wir betrachten also wieder in den Gleichungen (1) und (9) und ebenso in den Gleichungen (51) bis (53) die Stärke G des Impulsmomentes als veränderlich und nur noch die lebendige Kraft h als konstant. Die Gleichungen (51) bis (53), welche die Projektionen der Raumkurven des Büschels auf die Koordinatenebenen darstellen, sind aber bei veränderlichem G die Gleichungen dreier in den Koordinatenebenen liegender Kegelschnittbüschel. Und zwar sind die Gleichungen (51) und (53), welche den Projektionen auf die yz - und xy -Ebene zugehören, die Gleichungen je eines Büschels ähnlicher und koaxialer Ellipsen, deren Axen die in diesen Ebenen liegenden Hauptträgheitsachsen bilden; die Gleichung (52a) oder (52b) aber die Gleichung eines Büschels von Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten.

Die Gleichung dieses Asymptotenpaars, welches das Hyperbelbüschel vollständig charakterisiert und selbst dem Büschel angehört, lautet

$$(54) \quad A(B - A)p^2 - C(C - B)r^2 = 0.$$

Sie stimmt also mit der Gleichung (22) überein, die sich uns oben für das Ebenenpaar ergeben hat, das in dem Büschel der Polhodiekegel enthalten ist und aus dem Ellipsoid der lebendigen Kraft die „trennende Polhodie“ ausschneidet. Die Asymptoten des Hyperbelbüschels sind daher nichts anderes als die beiden Geraden, in denen die xz -Ebene durch das Ebenenpaar der trennenden Polhodie geschnitten wird.

Die Kurven des Hyperbelbüschels verteilen sich auf die beiden Scheitelwinkelpaare, welche die gemeinsamen Asymptoten des Büschels mit einander bilden. In dem Falle (a) nämlich liegen sie in dem

Winkelpaar, das die x -Axe enthält, in dem Falle (b) in dem Winkelpaar, das die z -Axe einschließt. *Die Hyperbeln innerhalb eines jeden dieser beiden Winkelpaare sind wieder unter einander ähnlich und koaxial.*

Da eine jede Polhodiekurve als partieller Schnitt zweier Ellipsoide eine ganz im Endlichen verlaufende Kurve ist, so muß dasselbe auch von ihren senkrechten Projektionen auf die Koordinatenebenen gelten. Insbesondere können daher ihre senkrechten Projektionen auf die xz -Ebene nicht die ganzen durch die Gleichungen (52a) und (52b) dargestellten Hyperbeln umfassen, sondern sie können *nur einen Bogen dieser Hyperbeln ausmachen*, und zwar offenbar einen Bogen, dessen Mitte von einem Scheitel der Hyperbel gebildet wird. Aber auch von den Ellipsen, welche durch die Gleichungen (51) und (53) dargestellt werden, ist für jeden gegebenen Wert der Stärke G des Impulsmomentes immer nur die eine in ihrer ganzen Ausdehnung die Projektion der diesem Werte von G zugehörigen Polhodiekurve, *von der andern Ellipse dagegen nur ein Bogen.*

Zum Beweise hierfür hat man nur zu zeigen, daß eine von den Halbaxen der Ellipsen (51) und (53) die entsprechende Halbaxe des Ellipsoids der lebendigen Kraft an GröÙe übertrifft.

Man bezeichne also die Halbaxen der Ellipse (51), welche der yz -Ebene angehört, mit β_1 und γ_1 , die der Ellipse (53), welche in der xy -Ebene liegt, mit α_3 und β_3 . Dann ist zufolge der Gleichung (51)

$$(55) \quad \beta_1^2 = \frac{2h \left(\frac{G^2}{2h} - A \right)}{B(B-A)} \quad \text{und} \quad \gamma_1^2 = \frac{2h \left(\frac{G^2}{2h} - A \right)}{C(C-A)}$$

und zufolge der Gleichung (53)

$$(56) \quad \alpha_3^2 = \frac{2h \left(C - \frac{G^2}{2h} \right)}{A(C-A)} \quad \text{und} \quad \beta_3^2 = \frac{2h \left(C - \frac{G^2}{2h} \right)}{B(C-B)}.$$

In dem Falle (a), in welchem $\delta > b$ und

$$(47) \quad A < \frac{G^2}{2h} < B < C$$

ist, wird daher

$$\beta_1^2 < \frac{2h}{B} \quad \text{und} \quad \gamma_1^2 < \frac{2h}{C}$$

oder wegen (27)

$$< b^2 \quad \quad < c^2,$$

also

$$(57) \quad \beta_1 < b \quad \text{und} \quad \gamma_1 < c;$$

ferner

$$\alpha_3^2 < \frac{2h}{A} \quad \text{und} \quad \beta_3^2 > \frac{2h}{B}$$

oder wegen (27)

$$< a^2 \quad > b^2,$$

also

$$(58) \quad \alpha_3 < a \quad \text{und} \quad \beta_3 > b.$$

Hieraus folgt: Solange der Abstand δ des Drehpunktes von der Herpolhodieebene *größer* bleibt als die mittlere Halbaxe b des Ellipsoids der lebendigen Kraft, ist die Projektion der Polhodiekurve auf die yz -Ebene eine *volle Ellipse*, ihre Projektion auf die xy -Ebene aber nur ein *Ellipsenbogen*, welcher durch die x -Axe halbiert wird. Die *Polhodiekurve umschließt also in diesem Falle die x -Axe*, und dasselbe gilt dann auch von dem *Polhodiekegel* (vgl. Fig. 3).

In dem Falle b) dagegen, in welchem $\delta < b$ und

$$(48) \quad A < B < \frac{G^2}{2h} < C$$

ist, wird

$$\beta_1^2 > \frac{2h}{B} \quad \text{und} \quad \gamma_1^2 < \frac{2h}{C},$$

das heißt,

$$(59) \quad \beta_1 > b \quad \text{und} \quad \gamma_1 < c;$$

ferner

$$\alpha_3^2 < \frac{2h}{A} \quad \text{und} \quad \beta_3^2 < \frac{2h}{B},$$

also

$$(60) \quad \alpha_3 < a \quad \text{und} \quad \beta_3 < b.$$

Hieraus folgt: Solange der Abstand δ des Drehpunktes von der Herpolhodieebene *kleiner* bleibt als die mittlere Halbaxe b des Ellipsoids der lebendigen Kraft, ist die Projektion der Polhodiekurve auf die yz -Ebene ein *Ellipsenbogen*, welcher durch die z -Axe halbiert wird, ihre Projektion auf die xy -Ebene aber eine *volle Ellipse*. Die *Polhodiekurve umschließt also in diesem Falle die z -Axe*, und dasselbe gilt dann auch von dem *Polhodiekegel* (vgl. Fig. 3).

Man kann den Hauptinhalt der gewonnenen Ergebnisse in dem Satze zusammenfassen:

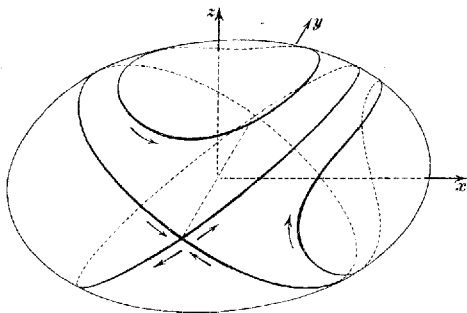
Bei der Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt umschließt der Polhodiekegel eine größte oder kleinste Halbaxe des Ellipsoids der lebendigen Kraft,

je nachdem der Abstand des Drehpunktes von der Herpolhodieebene gröfser oder kleiner ist als die mittlere Halbachse dieses Ellipsoids.

b) Das zweifach unendliche System aller Polhodiekurven.

Um endlich eine Übersicht über *sämtliche* Polhodiekurven eines um einen festen Punkt drehbaren Körpers zu gewinnen, hat man in den Gleichungen (1) und (11) nicht nur die Stärke G des Impulsmomentes, sondern auch die lebendige Kraft h als veränderlich anzusehen. Dann stellen diese Gleichungen ein *Bündel von Raumkurven vierter Ordnung*

Fig. 3.



der ersten Art dar¹⁾, deren Zweige das gewünschte System aller Polhodiekurven bilden. Von jenem Raumkurvenbündel aber kann man sich leicht eine Vorstellung verschaffen.

Die Gleichung (1) ist nämlich bei veränderlichem h die Gleichung eines Büschels ähnlicher und koaxialer Ellipsoide; und dieses Büschel hat die Eigenschaft, daß durch jeden Punkt des Raumes *eine und nur eine* Fläche des Büschels hindurchgeht, denn die Gleichung (1) bestimmt bei gegebenem p , q , r den Parameter h der Fläche eindeutig. Die Gleichung (11) aber war, wie wir im vierten Abschnitt gezeigt haben, die Gleichung des dort betrachteten Büschels von Polhodiekegeln, das heißt, ebenfalls die Gleichung eines Büschels von Flächen zweiter Ord-

1) Unter einem *Bündel von Raumkurven vierter Ordnung der ersten Art* verstehen wir dabei das zweifach unendliche System von Raumkurven, in welchem die Flächen eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung von den Flächen eines zweiten solchen Büschels geschnitten werden (vgl. S. 19).

nung. Und da auch von den Flächen dieses Kegelbüschels durch jeden Punkt des Raumes *stets eine* und, abgesehen vom Punkte O , auch *nur eine* Fläche hindurchgeht, der Punkt O aber in dem Büschel ähnlicher und koaxialer Ellipsoide eine Fläche für sich bildet, *so geht auch durch jeden Punkt des Raumes eine, aber auch nur eine Kurve des durch die Gleichungen (1) und (11) dargestellten Bündels von Raumkurven vierter Ordnung hindurch.* Dieselbe Eigenschaft kommt endlich auch dem System aller *Polhodiekurven* zu, welche die Zweige dieses Kurvenbündels bilden, wenigstens wenn man die Punkte der *Axe* des mittleren Hauptträgheitsmomentes ausnimmt, welche als Doppelpunkte der zerfallenden Raumkurven vierter Ordnung immer *zwei* Polhodiekurven angehören.

Man kann hieran noch die Bemerkung knüpfen, daß, wenn bei einem kraftfreien, um einen festen Punkt drehbaren starren Körper für irgend einen Augenblick die Lage des Körpers und überdies die Lage seines instantanen Drehpols gegeben ist, damit seine Bewegung in jedem Falle eindeutig bestimmt ist. Denn durch die Lage des Drehpols für irgend einen Augenblick ist, abgesehen von dem Ausnahmefall, wo der Drehpol auf die *Axe* des mittleren Trägheitsmomentes fällt, die zugehörige Polhodiekurve eindeutig festgelegt, außerdem aber auch die Lage der dieser Polhodiekurve entsprechenden Herpolhodieebene. In der That ist diese ja nichts anderes als die Tangentialebene, die man im anfänglichen Drehpol des Körpers an das durch ihn bestimmte Ellipsoid der lebendigen Kraft legen kann. Und da, wie unten gezeigt werden wird (vgl. S. 36), auch in dem genannten Ausnahmefall, wo der Drehpol der *Axe* des mittleren Trägheitsmomentes angehört, durch Angabe seiner Lage auf dieser *Axe* die Bewegung des Körpers unzweideutig vorgeschrieben ist, so hat man den Satz:

Kennt man bei einem kraftfreien, um einen festen Punkt drehbaren starren Körper für irgend einen Augenblick außer der Lage des Körpers noch die Lage des instantanen Drehpols, so ist dadurch die Bewegung des Körpers eindeutig bestimmt.

c) Der Durchlaufungssinn der Polhodiekurven.

Um über den Sinn der Fortbewegung des Drehpols auf der Polhodiekurve Aufschluß zu erhalten¹⁾, benutzt man am besten eine von den drei *Eulerschen Differentialgleichungen*, welche lauten:

1) Vgl. hierzu Routh, Bd. II. S. 106.

$$(61) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr \\ B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp \\ C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq. \end{cases}$$

In der mittleren von diesen Gleichungen ist mit Rücksicht auf die Ungleichung (6) der in der Klammer auftretende Faktor $C - A$ positiv. Die Gleichung zeigt daher, daß das Vorzeichen des Differentialquotienten $\frac{dq}{dt}$ mit dem des Produktes rp übereinstimmt, daß sich also der Drehpol in denjenigen vier Oktanten des beweglichen Koordinatensystems, für welche das Produkt rp positiv ist, im Sinne der positiven y -Axe bewegt, in den anderen vier Oktanten in entgegengesetztem Sinne (vgl. Fig. 3).

Umschließt also die Polhodiekurve die positive (oder negative) Seite der x -Axe, so wird die Polhodiekurve und also auch der zugehörige Polhodiekegel für einen vom Scheitel des Kegels aus die Kegelaxe entlang blickenden Beschauer in negativem Sinne durchlaufen (vgl. S. 5). Umschließt dagegen die Polhodiekurve die positive (oder negative) Seite der x -Axe, so erfolgt diese Durchlaufung in positivem Sinne. Man hat also den Satz:

Bei der Bewegung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt wird der Polhodiekegel von der instantanen Axe für einen vom Scheitel des Kegels die Kegelaxe entlang blickenden Beschauer in negativem oder in positivem Sinne durchlaufen, je nachdem diese Axe mit der Axe des kleinsten oder größten Trägheitsmomentes zusammenfällt.

Die Halbellipsen der trennenden Polhodie endlich werden für einen vom Drehpunkte aus die Axe des kleinsten (größten) Trägheitsmomentes entlang blickenden Beschauer in negativem (positivem) Sinne durchlaufen.

Sechster Abschnitt.

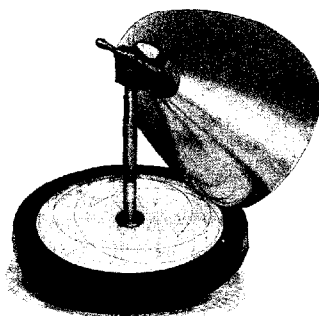
Die Erzeugung der Herpolhodiekurve mittelst der drei Apparate.

Die drei Apparate, durch welche in den beiden oben behandelten Hauptfällen und in dem Grenzfalle der trennenden Polhodie die Bewegung des kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt nachgeahmt und zugleich die Herpolhodiekurve beschrieben werden soll, beruhen auf dem Gedanken, daß man anstatt des Ellipsoids der lebendigen Kraft *auch diejenige Kurve auf der Herpolhodieebene rollen lassen*

kann, welche durch die aufeinanderfolgenden Berührungspunkte des Ellipsoids der lebendigen Kraft mit der Herpolhodieebene auf diesem Ellipsoide gebildet wird. Dabei ist vorausgesetzt, daß man diese Kurve, welche nach dem Obigen mit der Polhodiekurve identisch ist, mit dem „Trägheitskreuz des Drehpunktes“ in feste Verbindung bringt, den Drehpunkt in der gehörigen Entfernung von der Herpolhodieebene festhält und die Berührung der Polhodiekurve mit der Herpolhodieebene durch passende Aufhängung der Polhodiekurve so regelt, daß bei positiver Drehung des Körpers um den Leitstrahl des Berührungspunktes die Polhodiekurve von ihrem Berührungspunkte in dem auf S. 31 angegebenen Sinne durchlaufen wird (vgl. die Figuren 4 und 5).

Wie weiter unten gezeigt werden wird, ist dazu in den beiden oben betrachteten Hauptfällen einer nicht zerfallenden Polhodiekurve erforderlich, daß die Impulsaxe, das heißt, das vom Drehpunkte des

Fig. 4.



Körpers auf die Herpolhodieebene gefällte Lot, von der Polhodiekurve umschlossen wird oder nicht, je nachdem der Abstand des Drehpunktes von der Herpolhodieebene kleiner oder größer ist als die mittlere Halbaxe des Ellipsoids der lebendigen Kraft.

Als feste Verbindung der Polhodiekurve mit dem Trägheitskreuz des Drehpunktes wird man am besten den Polhodiekegel benutzen. Man läßt also den längs der Polhodiekurve ab-

geschnittenen Polhodiekegel mit seiner Randkurve unter Ausschluss des Gleitens auf der Herpolhodieebene abrollen, während man seinen Scheitel in der zu der Polhodiekurve gehörigen Entfernung von der Herpolhodieebene festhält und dabei die Aufhängung in der oben angegebenen Weise regelt. Der geometrische Ort der Berührungspunkte der Herpolhodieebene mit der Randkurve des Polhodiekegels ist dann die Herpolhodiekurve.

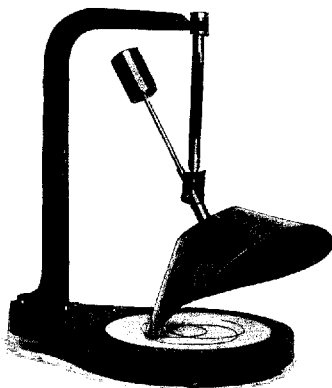
Eine solche Anordnung der Apparate gewährt noch den Vorteil, daß sie die Bewegung des Poinsoischen Polhodiekegels wieder mehr in den Vordergrund der Betrachtung rückt. Allerdings ist ja die oben gegebene, ebenfalls von Poincot herrührende Veranschaulichung der Drehung des kraftfreien starren Körpers durch das Abrollen eines

Ellipsoids auf einer Ebene äußerst übersichtlich und besitzt überdies den wichtigen Vorzug, daß die Modellierung eines einzigen Ellipsoids ausreichen würde, um alle möglichen Formen der Drehung eines gegebenen Körpers nachzuahmen; denn sieht man von den Unterschieden ab, welche lediglich durch die Größe der lebendigen Kraft der Bewegung bedingt werden, so würden sich die verschiedenen Bewegungsformen des Körpers durch bloße Veränderung des Abstandes der Herpolhodieebene vom Mittelpunkt des Ellipsoids ergeben müssen.

Andererseits aber leidet diese Methode der Veranschaulichung an dem Mangel, daß bei ihr die Form des Herpolhodiekegels und die Art der Bewegung des Polhodiekegels nicht deutlich genug erkennbar ist.

In diesen beiden Beziehungen aber läßt die von uns gewählte Methode, bei der die Polhodiekurve als Randkurve des Polhodiekegels auf der zugehörigen festen Ebene abrollt, nichts zu wünschen übrig; außerdem ermöglicht sie eine bessere Vergleichung der Bewegung des kraftfreien starren Körpers mit der Bewegung eines Körpers, der von Kräften beeinflusst wird. Endlich gestattet die beschriebene Einrichtung der Apparate, mittelst derselben die Herpolhodiekurve auf einem Papierblatt zu verzeichnen, so daß also die Apparate nicht nur die

Fig. 5.



Bewegung des kraftfreien starren Körpers nachahmen, sondern zugleich als Herpolhodiezirkel dienen können. Befestigt man nämlich ein Papierblatt mit einem Stück aufgelegten Blaupapiers auf der Fußplatte der Apparate und läßt den Polhodiekegel ohne Anwendung von Druck unter gelegentlicher sanfter Nachhülfe durch die Hand auf seiner Unterlage abrollen, so ruft der Kegel durch sein bloßes Gewicht die Herpolhodiekurve mit hinreichender Deutlichkeit auf dem Papierblatt hervor. Eine genaue Einhaltung der Entfernung des Drehpunktes von der Herpolhodieebene erzielt man dabei, wenn man nach Lösung der Schrauben, mittelst deren die Stütze des Drehpunktes auf der Fußplatte befestigt ist, die beiden Papierstücke zwischen der Stütze und der Fußplatte einklemmt.

Siebenter Abschnitt.

Die Gestalt der Herpolhodiekurve.

Die Gestalt und die Eigenschaften der Herpolhodiekurve lassen sich nicht mehr in so elementarer Weise entwickeln, wie dies bei der Polhodiekurve möglich war. Die Gleichung der Herpolhodiekurve wird nämlich im allgemeinen transscendent, und ihre Ableitung und Diskussion erfordert bereits umfangreichere Rechnungen, welche den für diese Blätter zur Verfügung stehenden Raum überschreiten würden. Es möge daher auf eine eingehende Behandlung der Herpolhodiekurve verzichtet werden, was um so mehr erlaubt scheint, als die vorliegende Abhandlung ja wesentlich den Zweck verfolgt, das Verständnis für die drei Apparate und die durch sie dargestellte Bewegung zu vermitteln und namentlich einen Überblick über die verschiedenen Bewegungsformen zu gewähren, welche bei der Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt eintreten können, wozu eine genauere Diskussion der Herpolhodiekurve nicht unbedingt erforderlich ist. Doch sollen wenigstens historisch die wichtigsten Eigenschaften der Herpolhodiekurve mitgeteilt werden; hinsichtlich ihrer Begründung aber möge, soweit dieselbe gröfsere Rechnungen nötig machen würde, auf die einschlägige Litteratur verwiesen werden.

a) Die Herpolhodiekurve in den beiden Hauptfällen.

Der Leitstrahl der Polhodiekurve, vom Drehpunkte des Körpers aus gezogen, variiert in den beiden von uns oben betrachteten Hauptfällen, auf die wir zunächst eingehen wollen, zwischen einem grössten Werte, den er für die beiden in der xz -Ebene gelegenen Scheitel der Kurve erreicht, und einem kleinsten Werte, den er für die beiden anderen Scheitel annimmt.¹⁾ Fällt man ferner vom Drehpunkte O des Körpers das Lot OM auf die Herpolhodieebene und bezeichnet die Verbindungslinien seines Fußpunktes M mit den Punkten der Herpolhodiekurve als die Leitstrahlen der Herpolhodiekurve, so bildet jeder Leitstrahl der Herpolhodiekurve die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse der zugehörige Leitstrahl der Polhodiekurve ist, während die andere Kathete durch das Lot OM , das heifst, durch ein Stück der Impulsaxe dargestellt wird. Und dieses Lot ist wenigstens in den beiden von uns jetzt betrachteten Hauptfällen *kleiner*

1) Vgl. Poinso, Théorie nouvelle de la rotation des corps. Journ. de math. Serie I. Bd. 16 (1851). S. 108, in der von Schellbach besorgten deutschen Übersetzung (Berlin 1851) S. 43. Siehe ferner die obige Figur 3.

als der kleinste Leitstrahl der Polhodiekurve.¹⁾ Folglich schwankt auch der Leitstrahl der Herpolhodiekurve in den beiden Hauptfällen zwischen einem größten und einem kleinsten, *von Null verschiedenen* Werte hin und her.

Die Herpolhodiekurve ist also zwischen zwei konzentrische Kreise, ihre „*Grenzkreise*“, eingeschlossen, welche den Fußpunkt *M* jenes Lotes zum Mittelpunkt haben, und welche abwechselnd von der Herpolhodiekurve berührt werden.

Man kann daher den Punkt *M* als den Mittelpunkt der Herpolhodiekurve bezeichnen und die Impulsaxe, welche im Mittelpunkte *M* der Herpolhodiekurve auf deren Ebene senkrecht steht und zugleich durch den Scheitel *O* des Herpolhodiekegels hindurchgeht, die Axe des Herpolhodiekegels nennen.

Von dem Verlaufe der Herpolhodiekurve zwischen den beiden Grenzkreisen hatte sich Poinso^t eine unrichtige Vorstellung gebildet, in so fern er annahm, daß sich die Kurve nach Art einer Wellenlinie zwischen den beiden Kreisen hinziehe und also zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Berührungspunkten mit diesen Kreisen einen Wendepunkt besitze.²⁾

Im Jahre 1880 zeigte indes W. Hefs, indem er sich dabei auf die nach dem Obigen zwischen den Hauptträgheitsmomenten eines Körpers herrschende Ungleichung

$$(7) \quad A + B \geq C$$

stützte, daß die Herpolhodiekurve keine Wendepunkte aufweisen könne³⁾, sondern überall ihrem Mittelpunkte die konvexe Seite zukehren müsse, ein Ergebnis, das dann später von verschiedenen Autoren bestätigt worden ist.⁴⁾ In dieser Beziehung

1) Dies folgt z. B. aus den von Poinso^t in derselben Abhandlung auf S. 111 (in der Übersetzung auf S. 45) unter der Nr. 62 angegebenen Formeln.

2) Vgl. dieselbe Abhandlung S. 93 f. (Übersetzung S. 35 f.). Auf dieser irrigen Anschauung beruhte auch die von Poinso^t ebenda S. 102 eingeführte Bezeichnung Herpolhodie (= Schlingelweg).

3) Hefs, Dissertation S. 29—32.

4) Zuerst von De Sparre in den Arbeiten: Sur l'epolodie de Poinso^t. Comptes rendus des séances de l'ac. Paris Bd. 99 (1884 Okt.—Dez.). S. 906. Sur l'herpolhodie dans le cas d'une surface du second degré quelconque. Ebenda. Bd. 101 (1885 Juli—Sept.). S. 370. Sur le mouvement d'un solide autour d'un point fixe et sur le pendule conique. Ann. de la soc. scient. de Bruxelles. Bd. 9 (1885) B. S. 49. Besonders geeignet zur Orientierung über den Gegenstand sind die beiden Arbeiten von Resal: Développements sur un point de la théorie de la rotation des corps solides. Journ. de l'éc. polyt. Heft 53 (1883), S. 17 und

gleichet also die Herpolhodiekurve der senkrechten Projektion der Bahn des sphärischen Pendels auf eine horizontale Ebene, mit der sie übrigens auch die Eigenschaft gemein hat, daß sie im allgemeinen *eine transcendente Kurve ist, die sich in unendlich vielen miteinander kongruenten Windungen zwischen den beiden Grenzkreisen hinschlingt, ohne jemals in sich zurückzukehren.*

b) Die Herpolhodiekurve in dem Grenzfall der trennenden Polhodie.

In dem Grenzfall der trennenden Polhodie, zu dem wir nunmehr übergehen wollen, gehört einem jeden Ellipsenquadranten der Polhodiekurve ein spiralförmig gewundenes Stück der Herpolhodiekurve zu, das sich in *unendlich vielen Spiralwindungen* um den Schnittpunkt der Impulsaxe mit der invariablen Ebene herumzieht.¹⁾ Der starre Körper bewegt sich dann in der Weise, daß die Polhodieebene an diesen Spiralwindungen der Herpolhodiekurve abrollt, und zwar mit einer Winkelgeschwindigkeit, welche für jeden Augenblick durch die Länge des Leitstrahls der Polhodiekurve dargestellt wird. Und da diese Winkelgeschwindigkeit stets endlich bleibt, die Anzahl der Spiralwindungen aber unendlich groß ist, und bei Durchlaufung jeder Spiralwindung eine volle Umdrehung des Körpers stattfindet, so wird der instantane Drehpol des Körpers den Mittelpunkt der Spirale in endlicher Zeit überhaupt nicht erreichen können.

Dies Ergebnis läßt sich auch dadurch bestätigen, daß man direkt die Zeit bestimmt, welche der Drehpol zur Durchlaufung einer ganzen Herpolhodiespirale gebrauchen würde, wodurch sich für diese Zeit ein unendlich großer Wert ergibt.²⁾

Umgekehrt wird ein kraftfreier starrer Körper, der für einen Augenblick um die Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes rotiert, in jeder noch so langen endlichen Zeit in seiner Rotation um diese Axe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit beharren; und zwar bleibt dann diese Axe sowohl im Körper wie im Raume fest.

Die Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes ist also ebenso wie die beiden anderen Hauptträgheitsaxen eine „permanente“ („natürliche“, „freie“) Drehaxe des Körpers.

Note sur la courbure de l'herpolhodie. Ebenda. Heft 55 (1885), S. 275, von denen die zweite den betreffenden Nachweis enthält. Vgl. ferner die Arbeit von A. Petrus: Beiträge zur Theorie der Herpolhodie Poinsets. Halle. Inaugural-dissertation. 1902, in der sich auch weitere Litteraturangaben finden.

1) Vgl. die bereits mehrfach zitierte Arbeit von Poinset, S. 95 ff. und 116 ff. (Übersetzung S. 36 f. und 47 f.)

2) Ebenda S. 299.

Achter Abschnitt.

Die Stabilität der Drehung um die drei Hauptträgheitsachsen.

Indessen besteht zwischen der Drehung um die Axe des mittleren und um die Axen der beiden extremen Hauptträgheitsmomente ein wichtiger Unterschied hinsichtlich der Stabilität der Drehung. Wird nämlich die Drehaxe des Körpers durch eine momentan wirkende äußere Kraft in dem Körper auch nur unendlich wenig aus der Lage einer der drei Hauptträgheitsachsen verschoben, und dann der Körper wieder sich selbst überlassen, so beschreibt die instantane Axe denjenigen Kegel aus dem von uns oben betrachteten Büschel von Polhodiekegeln, welcher durch die neue Lage der Drehaxe bestimmt wird. *Die Form dieses Polhodiekegels aber ist gänzlich verschieden, je nachdem die permanente Drehaxe durch die Axe des mittleren oder durch die Axe eines der beiden extremen Hauptträgheitsmomente gebildet wurde.*

Bei der Axe des größten oder kleinsten Trägheitsmomentes nämlich ist der Polhodiekegel ein Kegel von sehr kleinen Öffnungswinkeln. Trotz der Störung durch den Anstoß hält sich daher die Drehaxe sowohl im Körper wie im Raume in unmittelbarer Nähe der ursprünglichen permanenten Drehaxe. Die Drehung des Körpers um die Axe des größten oder kleinsten Trägheitsmoments heißt daher stabil.¹⁾

Ganz anders liegen die Verhältnisse bei einer Drehung um die Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes.

Sieht man zunächst von dem Falle ab, wo die Drehaxe auch nach der Einwirkung des äußeren Anstoßes in einer der beiden Ebenen der trennenden Polhodie verbleibt, so wird die Drehaxe nach Aufhebung der störenden Kraft einen nicht zerfallenden Polhodiekegel beschreiben, welcher sich eng an die Ebenen der trennenden Polhodie anschmiegt und in einem der vier keilförmigen Räume liegt, die durch das Ebenenpaar der trennenden Polhodie gebildet werden (vgl. Fig. 3), *welcher also nicht die Axe des mittleren Hauptträgheitsmoments, sondern entweder die des kleinsten oder die des größten Trägheitsmomentes umschließt wird.* Die größte und kleinste Öffnung eines solchen Kegels kann dabei nur wenig von den Werten π und 2λ oder π und $\pi - 2\lambda$ abweichen, vorausgesetzt, daß wir wie oben (auf S. 18 ff.) unter λ den

1) Vgl. hierzu Klein-Sommerfeld S. 128 ff.; ferner Fricke, Kurzgefaßte Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-funktionentheoretischer Teil. Leipzig. 1900. S. 335 ff. und Appell, Traité de mécanique rationelle. Bd. II. Paris. 1896. S. 219 ff.

Winkel verstehen, den die Ebenen der trennenden Polhodie mit der *xy*-Ebene einschließen. Infolgedessen wird sich die instantane Drehaxe in hinreichend langer, aber jedenfalls endlicher Zeit sehr stark von der Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes entfernen¹⁾, und zwar sowohl in dem Körper wie im Raume.

Aber selbst in dem bisher ausgeschlossenen Falle, wo die Störung der Bewegung eine Verschiebung der instantanen Drehaxe innerhalb einer der beiden Ebenen der trennenden Polhodie zur Folge hat, wird mit Rücksicht auf den Durchlaufungssinn der Polhodiekurven (vgl. Fig. 3) wenigstens für *zwei* von den vier möglichen Verschiebungen ebenfalls bereits in endlicher Zeit eine starke Verlegung der Drehaxe stattfinden, während bei den *beiden anderen* Verschiebungen allerdings die instantane Drehaxe wieder ihrer ursprünglichen Lage zustreben wird.

Die Drehung des Körpers um die Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes besitzt also die Eigenschaft, daß eine noch so kleine Störung dieser Drehung im allgemeinen eine Veränderung in der Bewegung hervorrufen wird, bei welcher nach endlicher Zeit die instantane Drehaxe eine von der ursprünglichen Lage der Axe sehr stark abweichende Richtung annimmt. Aus diesem Grunde nennt man die Drehung um die Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes *labil*.

Neunter Abschnitt.

Die Art des Abrollens des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel.

Schon oben wurde auf den Unterschied hingewiesen, der in der Art des Abrollens des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel hervortritt und zu einer verschiedenen Aufhängung der Polhodiekegel bei den Apparaten Veranlassung giebt (vgl. Fig. 4 und 5).

Ersetzt man eine *ganz beliebige Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt* durch die Abwicklung eines beweglichen Kegels auf einem festen Kegel, so können *drei* verschiedene Bewegungsformen auftreten, welche man entsprechend den drei beim Rollen eines beweglichen Kreises auf einem festen Kreise vorkommenden Bewegungsformen als *epicykloidisch*, *hypocykloidisch* und *pericykloidisch* •bezeichnen kann.

Sobald nämlich die beiden Kegel sich längs ihrer instantanen Berührungslinie ihre konvexe Seite zukehren, wollen wir das Abrollen

1) Jede nicht zerfallende Polhodiekurve wird von der instantanen Achse in endlicher Zeit durchlaufen. Vgl. z. B. das soeben erwähnte Werk von Fricke S. 333.

des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel für den betreffenden Augenblick epicykloidisch nennen. Wenn dagegen die konvexen Seiten beider Kegel längs ihrer Berührungslinie nach derselben Seite gewendet sind, soll die Bewegung als hypocykloidisch oder pericykloidisch bezeichnet werden, je nachdem der Polhodiekegel von dem Herpolhodiekegel längs der Berührungslinie umschlossen wird, oder selbst den Herpolhodiekegel längs dieser Linie umschließt.

Ein *Übergang* aus der epicykloidischen in die hypocykloidische oder pericykloidische Bewegungsform oder der umgekehrte Übergang findet statt, wenn die Berührungslinie der beiden Kegel, das heißt, die instantane Drehachse des Körpers in eine „*Wendelinie*“ eines der beiden Kegel zu liegen kommt. Dagegen tritt ein Übergang aus der hypocykloidischen in die pericykloidische Bewegungsform oder der umgekehrte Übergang ein, wenn die beiden Kegel oder, was auf dasselbe hinauskommt, die beiden Kurven eines senkrecht zu ihrer Berührungslinie gelegten Normalschnitts mit einander eine *Berührung gerader Ordnung* haben.

Bei dem von uns betrachteten besonderen Fall eines kraftfreien Körpers sind indes von diesen drei Arten des Abrollens nur die epicykloidische und die pericykloidische Bewegungsform möglich, während eine hypocykloidische Bewegung überhaupt ausgeschlossen ist.

Das kann man sich auf folgende Weise klar machen: Rein kinematisch betrachtet wären für eine hypocykloidische Bewegung zwei Formen denkbar. In der That könnten die beiden Kegel entweder gleichzeitig der Axe des Herpolhodiekegels ihre konvexe Seite zukehren, oder aber beide zugleich ihre konkave Seite. Bei der Bewegung eines kraftfreien starren Körpers indes ist der erstere von diesen beiden Fällen von vornherein ausgeschlossen, weil nach dem Helsschen Satze (vgl. S. 35) *der Herpolhodiekegel seiner Axe stets die konkave Seite zuwendet*. Man überzeugt sich aber leicht, daß ebenso auch die andere rein kinematisch denkbare Art hypocykloidischen Abrollens, eine hypocykloidische Bewegung nämlich, bei der beide Kegel längs ihrer Berührungslinie der Axe des Herpolhodiekegels ihre konkave Seite zukehren, bei einem kraftfreien Körper kinetisch unmöglich ist. Denn da sich beim kraftfreien starren Körper die Bewegung in der Weise vollzieht, daß das Ellipsoid der lebendigen Kraft auf einer festen Ebene, der Herpolhodieebene, abrollt, und die Polhodiekurve den geometrischen Ort derjenigen Punkte dieses Ellipsoids bildet, welche während der Bewegung mit der Herpolhodieebene in Berührung treten, so liegt für jeden Augenblick der Bewegung die Polhodiekurve *auf derselben Seite der*

Herpolhodiebene wie der Mittelpunkt des Ellipsoids, das heisst, wie der Drehpunkt des Körpers. Würde sich aber der Polhodiekegel mit seiner Polhodiekurve auf hypocykloidische Art auf dem Herpolhodiekegel und der Herpolhodiekurve abwickeln und zugleich der Axe des Herpolhodiekegels seine konkave Seite zuwenden, so müßte gerade im Gegenteil die Polhodiekurve in der Umgebung ihres Berührungspunktes mit der Herpolhodiekurve von dem gemeinsamen Scheitel der beiden Kegel, das heisst, *vom Drehpunkte des Körpers, durch die Herpolhodieebene getrennt sein.* Denn in dem Falle einer hypocykloidischen Bewegung müßte sich der Polhodiekegel mit seiner Polhodiekurve aus dem ihn umfassenden Herpolhodiekegel und seiner Herpolhodiekurve in der Umgebung der Berührungslinie beider Kegel durch Zusammenbiegen des Herpolhodiekegels unter Festhaltung der Berührungslinie samt ihrer Tangentialebene erzeugen lassen. Nun ist aber beim kraftfreien starren Körper die Herpolhodiekurve eine ebene Kurve. Und bei weiterem Zusammenbiegen des Herpolhodiekegels, der ja seiner Axe die konkave Seite zukehrt, würde die Herpolhodiekurve aus ihrer Ebene heraustreten und auf diejenige Seite dieser Ebene gelangen müssen, welche von dem Drehpunkte des Körpers durch diese Ebene getrennt ist. Da aber eine solche Lage der Polhodiekurve nach dem Obigen ausgeschlossen ist, so ist für einen kraftfreien starren Körper eine hypocykloidische Bewegung überhaupt unmöglich. Es kann also die Bewegung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt nur entweder epicykloidisch oder pericykloidisch sein. Hieraus folgt zum Beispiel, daß eine Bewegung von der Art der Präzessionsbewegung der Erde, welche bekanntlich hypocykloidisch ist, bei einem kraftfreien starren Körper nicht vorkommen kann.

Andererseits kann aber die Bewegung eines kraftfreien starren Körpers auch nicht abwechselnd epicykloidisch und pericykloidisch sein, sondern sie muß während ihres ganzen Verlaufes ihren Charakter bewahren; denn weder der Polhodiekegel, welcher ja von der zweiten Ordnung ist, noch auch der Herpolhodiekegel (vgl. S. 35) weist eine Wendelinie auf. Das Auftreten einer Wendelinie bei einem der beiden Kegel war aber nach dem Obigen (vgl. S. 39) die Voraussetzung für einen solchen Übergang.

Ob nun endlich die epicykloidische oder die pericykloidische Bewegungsform eintritt, läßt sich ziemlich leicht entscheiden. Schon die Betrachtung der Bewegung des auf der Herpolhodieebene rollenden Ellipsoids der lebendigen Kraft läßt erraten, daß das Abrollen des Polhodiekegels epicykloidisch oder pericykloidisch sein wird, je nachdem der Polhodiekegel die größte oder kleinste Axe dieses Ellipsoids umschließt.

Mit völliger Sicherheit aber entnimmt man dies aus dem Durchlaufungssinn des Polhodiekegels. Da nämlich nach unserer Vereinbarung (vgl. S. 35) die „Drehstrecke“, das heisst die Strecke vom Drehpunkt nach dem Drehpol, immer nach derjenigen Seite der instantanen Axe hin abgetragen wird, um welche herum die Drehung in positivem Sinne erfolgt, so gilt ganz allgemein der Satz:

Bei epicykloidischem oder hypocykloidischem Abrollen eines Polhodiekegels auf seinem Herpolhodiekegel wird für einen Beschauer, dessen Auge im Scheitel der beiden Kegel liegt, der Polhodiekegel von der instantanen Axe in negativem Sinne durchlaufen, bei pericykloidischem Abrollen in positivem Sinne.¹⁾

Für einen kraftfreien starren Körper, bei welchem, wie wir gezeigt haben, die hypocykloidsche Bewegungsform ausgeschlossen ist, kann man diesem Satze auch die Fassung geben:

Bei einem kraftfreien starren Körper ist die Bewegung des Polhodiekegels epicykloidisch oder pericykloidisch, je nachdem für einen vom Scheitel des Polhodiekegels die Kegelaxe entlang blickenden Beschauer der Kegel von der instantanen Axe in negativem oder positivem Sinne durchlaufen wird.

Hierfür aber kann man nach dem auf S. 31 entwickelten Satze auch sagen:

Bei der Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt ist das Abrollen des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel epicykloidisch oder pericykloidisch, je nachdem seine Axe mit der Axe des kleinsten oder grössten Trägheitsmomentes zusammenfällt, oder, was nach dem Satze auf S. 28 f. dasselbe ist, je nachdem der Abstand des Drehpunktes von der Herpolhodieebene grösser oder kleiner ist als die mittlere Halbaxe des Ellipsoids der lebendigen Kraft.

Zehnter Abschnitt.

Fortsetzung: Der Impulskegel.

In engem Zusammenhang mit der Art des Abrollens des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel steht die Frage, ob die Impulsaxe der Bewegung, welche zugleich die Axe des Herpolhodiekegels bildet, ausserhalb oder innerhalb des Polhodiekegels liegt.

1) Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, braucht man sich nur zwei Kreiskegel vorzustellen, von denen der eine auf dem andern auf epicykloidsche, hypocykloidsche oder pericykloidsche Art abrollt.

Um diese Frage allgemein zu entscheiden, betrachte man die relative Bewegung der Impulsaxe in Bezug auf das mit dem Körper fest verbundene Koordinatensystem. Die Koordinaten L , M , N des Impulspols in Bezug auf das bewegliche System sind nach S. 12 mit den Koordinaten p , q , r des instantanen Drehpols durch die Gleichungen verknüpft

$$(62) \quad L = Ap, \quad M = Bq, \quad N = Cr.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß der Impulspol relativ zu dem in Bewegung begriffenen Körper eine Kurve beschreiben wird, welche zu der Polhodiekurve in dem Verwandtschaftsverhältnis der *Affinität* steht, und daß diese Affinität die drei Koordinatenachsen des beweglichen Systems, das heißt, die drei Haupttaxen der Polhodiekurve zu *Doppellinien* hat. Hieraus folgt, daß die von dem Impulspol in dem drehbaren Körper beschriebene Kurve, wir wollen sie nach dem Vorgange von Klein und Sommerfeld¹⁾ als die Impulskurve bezeichnen, ebenso wie die Polhodiekurve einen Zweig einer *Raumkurve vierter Ordnung* bildet, welche die Koordinatenebenen des beweglichen Systems zu Symmetrieebenen hat, und daß sie ferner in *zwei ebene Kurven zerfällt*, deren Ebenen durch die Axe des mittleren Hauptträgheitsmoments hindurchgehen, sobald dies bei der zugehörigen Polhodiekurve eintritt.

Die Gleichungen der Impulskurve erhält man, wenn man in den Gleichungen (1) und (9) der Polhodiekurve für die Koordinaten p , q , r des Drehpols ihre Werte

$$(63) \quad p = \frac{L}{A}, \quad q = \frac{M}{B}, \quad r = \frac{N}{C},$$

ausgedrückt in den Koordinaten L , M , N des Impulspols, substituiert, wodurch sich die Gleichungen ergeben:

$$(64) \quad \frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C} = 2h$$

und

$$(65) \quad L^2 + M^2 + N^2 = G^2,$$

welche zeigen, daß die Impulskurve eine sphärische Kurve ist, die aus der Kugel (65) durch das mit ihr konzentrische Ellipsoid (64)

1) Klein-Sommerfeld S. 123. Vgl. ferner: Maxwell, On a Dynamical Top, for exhibiting the phenomena of the motion of a system of invariable form about a fixed point, with some suggestions as to the Earth's motion. Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. 21. Part. IV. 1857. (Scientific Papers. Vol. 1. Cambridge. 1890. S. 248.)

ausgeschnitten wird. Hieraus ergibt sich insbesondere, daß die beiden ebenen Kurven, aus denen sich die zerfallende Impulskurve zusammensetzt, zwei größte Halbkreise der Kugel (65) sind.

Für den vorliegenden Zweck genügt es, den „Impulskegel“, das heißt, den Kegel zu betrachten, der die Impulskurve zur Leitkurve und den Drehpunkt des Körpers zum Scheitel hat, und welcher also den geometrischen Ort der Impulsaxe bildet. Seine Gleichung findet man, wenn man aus den Gleichungen (64) und (65) der Impulskurve durch lineare Verknüpfung eine in L , M , N homogene quadratische Gleichung ableitet. Dadurch ergibt sich für den Impulskegel die Gleichung:

$$(66) \quad \frac{1}{A} \left(\frac{G^2}{2h} - A \right) L^2 + \frac{1}{B} \left(\frac{G^2}{2h} - B \right) M^2 + \frac{1}{C} \left(\frac{G^2}{2h} - C \right) N^2 = 0.$$

Sie zeigt, daß der Impulskegel ebenso wie der Polhodiekegel ein Kegel zweiter Ordnung ist, woraus noch folgt, daß die Impulskurve als ein sphärischer Kegelschnitt bezeichnet werden darf.

Um die Lage des Impulskegels gegen den Polhodiekegel zu ermitteln, dessen Gleichung lautete:

$$(11) \quad A \left(\frac{G^2}{2h} - A \right) p^2 + B \left(\frac{G^2}{2h} - B \right) q^2 + C \left(\frac{G^2}{2h} - C \right) r^2 = 0,$$

hat man wieder die beiden oben behandelten Hauptfälle (a) und (b) und den Grenzfall der trennenden Polhodie von einander zu unterscheiden. Die beiden Hauptfälle (a) und (b) waren dadurch charakterisiert, daß in dem einen Falle

$$(a) \quad A < \frac{G^2}{2h} < B < C \quad \text{und} \quad \delta > b,$$

in dem andern Falle dagegen

$$(b) \quad A < B < \frac{G^2}{2h} < C \quad \text{und} \quad \delta < b \quad \text{war.}$$

In dem ersteren Falle (a), in welchem, wie oben (vgl. S. 28 f.) gezeigt ist, der Polhodiekegel die x -Axe umschließt, schneide man die beiden Kegel mit einer zur yz -Ebene parallelen Ebene, welche von dieser den Abstand 1 hat, deren Gleichung also lautet:

$$(67) \quad L = 1 \quad \text{oder} \quad p = 1.$$

Die Koordinaten M , N und q , r der beiden Schnittkurven genügen dann den Gleichungen:

$$(68) \quad \frac{1}{A} \left(\frac{G^2}{2h} - A \right) = \frac{1}{B} \left(B - \frac{G^2}{2h} \right) M^2 + \frac{1}{C} \left(C - \frac{G^2}{2h} \right) N^2 \quad \text{und}$$

$$(69) \quad A \left(\frac{G^2}{2h} - A \right) = B \left(B - \frac{G^2}{2h} \right) q^2 + C \left(C - \frac{G^2}{2h} \right) r^2.$$

Die Ebene (67) schneidet also den Impulskegel sowohl wie den Polhodiekegel in einer Ellipse; und zwar besitzen deren Halbaxen b_i , c_i und b_p , c_p die Werte:

$$b_i = \sqrt{\frac{\frac{G^2}{B} - \frac{A}{2h}}{\frac{A}{B} - \frac{G^2}{2h}}}, \quad c_i = \sqrt{\frac{\frac{G^2}{C} - \frac{A}{2h}}{\frac{A}{C} - \frac{G^2}{2h}}}$$

und

$$b_p = \sqrt{\frac{\frac{G^2}{A} - \frac{A}{2h}}{\frac{A}{B} - \frac{G^2}{2h}}}, \quad c_p = \sqrt{\frac{\frac{G^2}{A} - \frac{A}{2h}}{\frac{A}{C} - \frac{G^2}{2h}}}.$$

Zwischen den entsprechenden Halbaxen der beiden Ellipsen bestehen daher die Beziehungen:

$$b_i = \frac{B}{A} b_p, \quad c_i = \frac{C}{A} c_p,$$

aus denen wegen $A < B < C$ die Ungleichungen folgen:

$$(70) \quad b_i > b_p, \quad c_i > c_p.$$

Diese aber liefern das Ergebnis:

In dem Falle (a) umschließt der Impulskegel den Polhodiekegel. Es liegt also die Impulsaxe, das heißt, die Axe des Herpolhodiekegels während der ganzen Bewegung des Körpers außerhalb des Polhodiekegels.

Da nun aber ferner nach S. 41 dem Falle (a) ein epicykloidisches Abrollen des Polhodiekegels entspricht, und andererseits die epicykloidische Bewegungsform auch nur in dem Falle (a) auftritt, so kann man noch hinzufügen:

Beim kraftfreien starren Körper ist das epicykloidische Abrollen des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel stets von solcher Art, daß die Axe des Herpolhodiekegels, einschließlic ihrer Verlängerung über den Drehpunkt des Körpers hinaus, ganz außerhalb des Polhodiekegels liegt.¹⁾

In dem zweiten Falle (b), in welchem, wie oben (vgl. S. 28 f.) gezeigt ist, der Polhodiekegel die z -Axe umschließt, schneide man die beiden Kegel durch eine zur xy -Ebene parallele Ebene, welche von dieser den Abstand 1 hat, deren Gleichung also lautet:

$$(71) \quad N = 1 \quad \text{oder} \quad r = 1.$$

1) Danach wäre z. B. eine Bewegungsform, wie sie in dem Buche von Klein und Sommerfeld auf S. 53 durch die Figur 9 veranschaulicht wird, für den Fall eines kraftfreien starren Körpers ausgeschlossen.

Die Koordinaten L , M und p , q der beiden Schnittkurven genügen dann den Gleichungen

$$(72) \quad \frac{1}{A} \left(\frac{G^2}{2h} - A \right) L^2 + \frac{1}{B} \left(\frac{G^2}{2h} - B \right) M^2 = \frac{1}{C} \left(C - \frac{G^2}{2h} \right) \quad \text{und}$$

$$(73) \quad A \left(\frac{G^2}{2h} - A \right) p^2 + B \left(\frac{G^2}{2h} - B \right) q^2 = C \left(C - \frac{G^2}{2h} \right).$$

Die Ebene (71) schneidet also wiederum sowohl den Impulskegel wie den Polhodiekegel in einer Ellipse; und zwar besitzen die Halbaxen dieser beiden Ellipsen, sie mögen heißen α_i , β_i und α_p , β_p , die Werte:

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{A}{C} \frac{C - \frac{G^2}{2h}}{\frac{G^2}{2h} - A}}, \quad \beta_i = \sqrt{\frac{B}{C} \frac{C - \frac{G^2}{2h}}{\frac{G^2}{2h} - B}}$$

und

$$\alpha_p = \sqrt{\frac{C}{A} \frac{C - \frac{G^2}{2h}}{\frac{G^2}{2h} - A}}, \quad \beta_p = \sqrt{\frac{C}{B} \frac{C - \frac{G^2}{2h}}{\frac{G^2}{2h} - B}}.$$

Zwischen den entsprechenden Halbaxen der beiden Ellipsen herrschen daher die Beziehungen:

$$\alpha_i = \frac{A}{C} \alpha_p, \quad \beta_i = \frac{B}{C} \beta_p,$$

aus denen wegen $A < B < C$ die Ungleichungen folgen:

$$(74) \quad \alpha_i < \alpha_p, \quad \beta_i < \beta_p.$$

Diese aber liefern das Ergebnis:

In dem Falle (b) wird der Impulskegel von dem Polhodiekegel umschlossen. Die Impulsaxe, das heisst die Axe des Herpolhodiekegels, liegt somit während der ganzen Bewegung des Körpers innerhalb des Polhodiekegels.

Schließlich bleibt noch die Bewegung in dem Grenzfall der trennenden Polhodie zu untersuchen. Für diesen Fall war nach S. 18 ff.

$$(19) \quad \frac{G^2}{2h} = B \quad \text{und} \quad (30) \quad \delta = b;$$

die Gleichung (66) des Impulskegels verwandelt sich daher in:

$$\frac{1}{A}(B - A)L^2 + \frac{1}{C}(B - C)N^2 = 0,$$

wofür man wegen $A < B < C$ besser schreiben wird:

$$(75) \quad \frac{1}{A}(B-A)L^2 - \frac{1}{C}(C-B)N^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$(76) \quad \frac{N}{L} = \pm \sqrt{\frac{C}{A} \frac{B-A}{C-B}}.$$

Der Impulskegel zerfällt also, wie oben schon angedeutet wurde, in ein reelles Ebenenpaar, dessen Ebenen durch die Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes hindurchgehen und mit der xy -Ebene, das heißt, mit der Ebene des kleinsten und mittleren Hauptträgheitsmomentes, zwei entgegengesetzt gleiche Neigungswinkel einschließen, die sich aus der Gleichung

$$(77) \quad \operatorname{tg} \nu = \pm \sqrt{\frac{C}{A} \frac{B-A}{C-B}}$$

ergeben. Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung

$$(32) \quad \operatorname{tg} \lambda = \pm \sqrt{\frac{A}{C} \frac{B-A}{C-B}}$$

für die Neigungswinkel λ , welche die Ebenen der trennenden Polhodie mit der xy -Ebene bilden, so ergibt sich zwischen den Neigungswinkeln λ und ν , welche die Ebenenpaare des zerfallenden Polhodie- und Impulskegels mit der Ebene des kleinsten und mittleren Hauptträgheitsmomentes bilden, die Beziehung

$$(77) \quad \operatorname{tg} \nu = \frac{C}{A} \operatorname{tg} \lambda,$$

oder wegen (27)

$$(78) \quad \operatorname{tg} \nu = \frac{a^2}{c^2} \operatorname{tg} \lambda,$$

die man auch durch die Proportion ersetzen kann:

$$(79) \quad \operatorname{tg} \nu : \operatorname{tg} \lambda = a^2 : c^2;$$

und multipliziert man diese Proportion mit der Proportion (36):

$$(36) \quad \operatorname{tg} \lambda : \operatorname{tg} \mu = c : a,$$

so erhält man die neue Proportion

$$(80) \quad \operatorname{tg} \nu : \operatorname{tg} \mu = a : c,$$

welche zeigt, daß die Neigungswinkel ν , welche die Ebenen des zerfallenden Impulskegels mit der xy -Ebene bilden zu den Neigungswinkeln μ , unter denen die Kreisschnitte des Ellipsoids der lebendigen Kraft gegen diese Ebene geneigt sind, in derselben Beziehung stehen, wie die Winkel μ zu den Neigungswinkeln λ , welche die Ebenen des

man im Punkte T an die Ellipse die Tangente legt und auf diese vom Punkte O aus das Lot OF fällt. Dann muß dieses Lot OF der Geraden OV angehören.

Aus der Lage der „Impulsebenen“ gegen die „Polhodieebenen“ kann man insbesondere die Folgerung ziehen:

Beim Abrollen einer Halbellipse der trennenden Polhodie auf der Herpolhodieebene liegt die Axe des Herpolhodiekegels stets in demjenigen von den vier Winkelräumen des zerfallenden Polhodiekegels, welcher die Axe des größten Trägheitsmomentes enthält und zugleich der rollenden Halbellipse anliegt.

Berührt die Halbellipse schließlich mit einem Endpunkte ihrer kleinen Axe die Herpolhodieebene, so fällt die Axe des Herpolhodiekegels mit dieser Axe der Halbellipse, das heißt, mit der Doppellinie des zerfallenden Polhodiekegels, zusammen.

Mit ein paar Worten möge hier endlich noch der bisher von der Betrachtung ausgeschlossene Fall gestreift werden, wo zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, wo also *das Trägheitsellipsoid und somit auch das Ellipsoid der lebendigen Kraft ein abgeplattetes oder ein gestrecktes Rotationsellipsoid ist.*

Denkt man sich für den Fall eines abgeplatteten Rotationsellipsoids, dessen Figurenaxe durch die z -Axe gebildet werden mag, in einer Meridianebene des Ellipsoids der lebendigen Kraft, etwa in der zx -Ebene, die Konstruktion der Spuren des Ebenenpaares der trennenden Polhodie wirklich ausgeführt (vgl. die Konstruktion auf S. 21 f. und die Figur 2), so fällt der Punkt T auf den Punkt A ; die beiden Ebenen des Ebenenpaares der trennenden Polhodie fallen also mit der Äquatorebene des abgeplatteten Rotationsellipsoids zusammen. Hieraus folgt:

Die Bewegung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt ist stets pericykloidisch, sobald sein Trägheitsellipsoid ein abgeplattetes Rotationsellipsoid ist.

Denn auch der Fall, wo die Bewegung um eine natürliche Drehaxe des Körpers erfolgt, nämlich entweder um die Figurenaxe oder um einen Durchmesser des Äquatorkreises, kann noch als Grenzfall einer pericykloidischen Bewegung aufgefaßt werden.

Führt man andererseits für den Fall eines gestreckten Rotationsellipsoids, dessen Figurenaxe mit der x -Axe zusammenfällt, innerhalb einer Meridianebene des Ellipsoids der lebendigen Kraft, etwa in der xz -Ebene, die Konstruktion der Spuren des Ebenenpaares der

trennenden Polhodie wirklich aus (vgl. Fig. 2), so kommt der Punkt T auf den Punkt C zu liegen; die beiden Ebenen des Ebenenpaares der trennenden Polhodie fallen also wieder mit der Äquatorebene des Rotationsellipsoids zusammen. Da aber diese Ebene in diesem Falle die Ebene der beiden kleinsten Halbachsen ist, so hat man den Satz:

Die Bewegung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt ist stets epicykloidisch, sobald sein Trägheitsellipsoid ein gestrecktes Rotationsellipsoid ist.

Denn auch hier kann die Bewegung um eine natürliche Drehaxe noch als Grenzfall einer epicykloidischen Bewegung angesehen werden.¹⁾

Elfter Abschnitt.

Die Konstanten der drei Apparate.

Betrachtet man in den Gleichungen (1) und (9) für das Ellipsoid der lebendigen Kraft und der Flächen die Hauptträgheitsmomente A , B , C als unbenannte Größen, denkt sich aber die Koordinaten p , q , r des Drehpols in cm ausgedrückt, so hat man sich den konstanten Wert h der lebendigen Kraft in qcm und die Stärke G des Impulsmomentes in cm gegeben zu denken.

Nun gehören alle drei Apparate einem und demselben Trägheitsellipsoide zu, welches den Hauptträgheitsmomenten

$$(81) \quad A = \frac{1}{0,04}, \quad B = \frac{1}{0,0196}, \quad C = \frac{1}{0,0144}$$

entspricht. Aber auch die lebendige Kraft ist für alle drei Apparate gleich groß angenommen und besitzt den Wert

$$(82) \quad h = 5000 \text{ qcm.}$$

Infolgedessen liegen die drei Polhodiekurven auch auf demselben Ellipsoide der lebendigen Kraft, auf dem Ellipsoide nämlich, dessen Halbachsen den Gleichungen (26) zufolge die Werte aufweisen:

$$(83) \quad a = \sqrt{\frac{2h}{A}} = 20 \text{ cm}, \quad b = \sqrt{\frac{2h}{B}} = 14 \text{ cm}, \quad c = \sqrt{\frac{2h}{C}} = 12 \text{ cm.}$$

1) Es mag an dieser Stelle noch bemerkt werden, daß die in den Vorlesungen über Dynamik von H. v. Helmholtz gegebene Darstellung der Drehung eines kraftfreien starren Körpers eine Verwechselung von Impuls- und Drehpol enthält, infolge deren die sonst schöne Behandlung des Gegenstandes zu falschen Ergebnissen geführt hat. Vgl. H. v. Helmholtz, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. I, Abt. 2, Die Dynamik diskreter Massenpunkte, herausgegeben von Krüger-Menzel. Leipzig, 1898. S. 327 f. Auch die auf S. 326 gegebenen Figuren bedürfen einer Berichtigung.

Die Bewegungen, welche durch die drei Apparate dargestellt werden, unterscheiden sich also von einander nur durch den Wert der Stärke G des Impulsmomentes.

Bei dem Apparat für die *epicykloidsche Bewegung des Polhodiekegels* (Apparat 1) ist das Quadrat des Impulsmomentes

$$G^2 = 435\,600 \text{ qcm}$$

gewählt, sodafs der Abstand δ des Drehpunktes von der Herpolhodieebene mit Rücksicht auf (16)

$$(85) \quad \delta = \frac{2h}{G} = 15,1515 \text{ cm}$$

wird.

Bei dem Apparat für die *pericykloidsche Bewegung des Polhodiekegels* (Apparat 2) ist

$$(86) \quad G^2 = 595\,240 \text{ qcm}$$

angenommen.¹⁾ Es wird somit hier

$$(87) \quad \delta = \frac{2h}{G} = 12,961 \text{ cm.}$$

Für die *Bewegung der trennenden Polhodie* (Apparat 3) endlich ist das Quadrat des Impulsmomentes

$$(88) \quad G^2 = 2h \cdot B = 510\,204 \text{ qcm.}$$

Also wird in diesem Falle

$$(89) \quad \delta = \frac{2h}{G} = \frac{2h}{\sqrt{2h \cdot B}} = \sqrt{\frac{2h}{B}} = b = 14 \text{ cm.}$$

Die Mafse der vier Figuren 1, 2, 3 und 6 entsprechen genau denen der drei Apparate; nur sind alle Längen im Verhältnis 187 : 1000 verkleinert. Bei den Figuren 1 und 3 sind ferner die zur Zeichenebene senkrechten Geraden in der Verkürzung 1 : 2 und mit der Neigung $\frac{\pi}{3}$ gegen die von rechts nach links laufende Gerade dargestellt.

1) Es ist derjenige Wert von G gewählt, für welchen bei der pericykloidschen Bewegung des Polhodiekegels der kleinste Leitstrahl der Herpolhodiekurve sein Maximum hat. Dies tritt nach W. Heffs (Dissertation, S. 16) ein, wenn

$$\frac{G^2}{2h} = \sqrt{BC}$$

ist.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	3
Erster Abschnitt: Der Polhodiekegel und der Herpolhodiekegel. Die beiden Polwege	4
Zweiter Abschnitt: Die Polhodiekurve	9
Dritter Abschnitt: Die Herpolhodiekurve	11
Vierter Abschnitt: Das Büschel der Polhodiekegel. Die drei zerfallenden Kegel	14
Fünfter Abschnitt: Das System der Polhodiekurven	18
a) Das System der Polhodiekurven, das einem konstanten Werte der lebendigen Kraft zugehört	18
α) Die drei Grenzfälle, insbesondere der Fall der trennenden Polhodie	19
β) Die beiden Hauptfälle	24
γ) Die Projektionen des betrachteten Systems von Polhodiekurven auf die Hauptträgheitsebenen	26
b) Das zweifach unendliche System aller Polhodiekurven.	29
c) Der Durchlaufungssinn der Polhodiekurven.	30
Sechster Abschnitt: Die Erzeugung der Herpolhodiekurven mittelst der drei Apparate.	31
Siebenter Abschnitt: Die Gestalt der Herpolhodiekurve	34
a) Die Herpolhodiekurve in den beiden Hauptfällen	34
b) Die Herpolhodiekurve in dem Grenzfall der trennenden Polhodie . .	36
Achter Abschnitt: Die Stabilität der Drehung um die drei Hauptträgheitsachsen	37
Neunter Abschnitt: Die Art des Abrollens des Polhodiekegels auf dem Her- polhodiekegel	38
Zehnter Abschnitt: Fortsetzung. Der Impulskegel.	41
Elfter Abschnitt: Die Konstanten der drei Apparate.	49